Колебания многослойной полуплоскости с относительно сильно заглубленной полостью произвольной формы

Р.Р. Кадыров, А.А. Ляпин, И.С. Савилкин

При проектировании строительных объектов в сейсмоопасных регионах необходимо учитывать строение и свойства основания, как правило, многослойного, а также наличие возможных заглубленных в него неоднородностей типа полостей или включений. Сложности математического моделирования динамических процессов в таких областях обусловлены большим числом параметров задачи и наличием отражающих и преломляющих поверхностей различной формы (плоские и криволинейные поверхности). В случае, когда полость имеет каноническую форму (круговой или эллиптический цилиндр, сфера), развиты подходы сведением краевой задачи к системе линейных алгебраических уравнений [1,2], а также использованием асимптотических методов [3,4]. При существенном отличии формы полости или включения от канонической наиболее распространенным является использование метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) [5,6]. При большом количестве слоев основания решение систем ГИУ представляет достаточно серьезную проблему. По этой причине в случае, когда полость произвольной формы достаточно сильно удалена от дневной поверхности представляется целесообразным использовать асимптотические методы для упрощения решении систем ГИУ.

Рассматривается упругая N- слойная полуплоскость, занимающая в декартовой системе координат (x, y) область D, как показано на рис. 1. Полуплоскость содержит заглубленную неоднородность с замкнутой кусочно-гладкой границей γ. Колебания в установившемся гармоническом с частотой ω режиме возбуждаются заданным на границе полости вектором распределенных усилий $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\rho})$, а на дневной поверхности среды в ограниченной области Ω – вектором напряжений $\mathbf{T}(y)$ (рис.1).

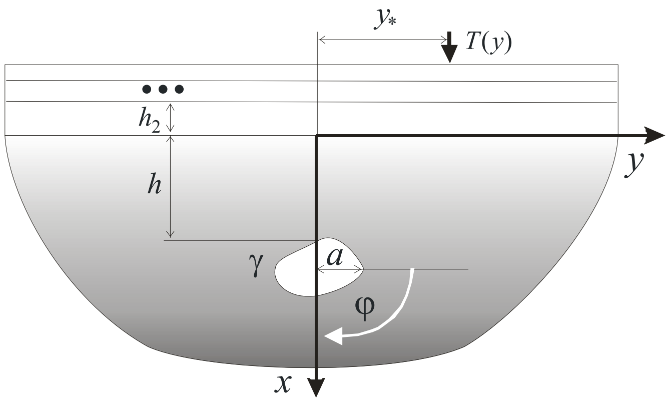

Рис. 1

Рассматривается случай относительно сильно заглубленной полости при наложении ограничения

$$\frac{2\pi h}{\lambda_P} >> 1, \tag{1}$$

здесь h - минимальное расстояние между границами полуплоскости и полости, λ_P- длина продольной волны в полуплоскости.

Решение краевой задачи сведено к граничному интегральному уравнению (ГИУ) вида:

$$\zeta_{lk}(\boldsymbol{\rho}_0)u_k^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_0) + \int_\gamma T_{ljk}^*(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})\, n_j(\boldsymbol{\rho})\, u_k^{(1)}(\boldsymbol{\rho})ds =$$

$$\int_\gamma U_{lj}^*(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})\,\tau_j(\boldsymbol{\rho})ds - \int_{-\infty}^{+\infty} U_{lj}^*(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})\, R_j^{(1)}(y)dy; \quad l,j,k = 1,2 \tag{2}$$

относительно неизвестного вектора перемещений $\mathbf{u}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) = \left\{u_x^{(1)}(\boldsymbol{\rho}), u_y^{(1)}(\boldsymbol{\rho})\right\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$ на γ. Здесь $U_{lj}^*(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})$, $T_{ljk}^*(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})$ - матрицы фундаментальных решений в перемещениях и напряжениях [7,8] для полуплоскости со свободной границей при действии точечного источника колебаний в $\boldsymbol{\rho}_0 = \{x_0, y_0\}$.

Для фундаментальных решений на основе принципа суперпозиции использовано представление:

$$U_{lj}^*(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho}) = U_{lj}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho}) + U_{lj}^+(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho}) + U_{lj}^-(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho}), \tag{3}$$

где $U_{lj}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})$ - поле точечного источника колебаний интенсивности $\mathbf{q}=\{q_1,q_2\}$ в плоскости, $U_{lj}^{+}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})$ - поле симметрично расположенного относительно границы $x=0$ источника интенсивности $\mathbf{q}^{+}=\{-q_1,q_2\}$, а $U_{lj}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})$ - поле отраженных от $x=0$ волн.

Вычисление функций U_{lj},U_{lj}^{+} и T_{ljk},T_{ljk}^{+} в виде набора функций Ханкеля является легко реализуемой задачей. Для поля отраженных волн $\widetilde{U}_{lj}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho},\alpha)$, $\widetilde{T}_{ljk}^{-}(\rho_0,\rho,\alpha)$, имеем представление в виде интеграла Фурье [9]:

$$U_{lj}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})=\sum_{p,q=1}^{2}U_{ljpq}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})=\sum_{p,q=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\widetilde{U}_{ljpq}^{-}(\alpha)\exp\left(i\lambda S_{pq}(\alpha)\right)d\alpha \tag{4}$$

$$S_{pq}(\alpha)=\cos\delta_1\,\alpha+\cos\delta_2\,\overline{\sigma}_{1p}+\cos\delta_3\,\overline{\sigma}_{1q}$$

$$\overline{\sigma}_{1p}=\sqrt{\theta_{1p}^2-\alpha^2},\quad \cos\delta_1=(y_0-y)/\lambda,\quad \cos\delta_2=x_0/\lambda,\quad \cos\delta_3=x/\lambda$$

где, $\widetilde{U}_{ljpq}^{-}(\alpha)$ - амплитудные функции, не содержащие больших параметров.

В случае принятого условия (1) для (4) применим метод стационарной фазы [10] для большого параметра $\theta_{11}\lambda=\theta_{11}\sqrt{(y-y_0)^2+x^2+x_0{}^2}$. В частности получим

$$U_{11}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})=i\theta_{11}\theta_{12}^{-1}E\quad\left[1+\underline{O}\left(\lambda^{-1}\right)\right] \tag{5}$$

$$T_{111}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})=-E\left[1+\underline{O}\left(\lambda^{-1}\right)\right],\quad T_{122}^{-}(\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\rho})=E\,\frac{\left(2\theta_{11}^2-\theta_{12}^2\right)}{\theta_{12}^2}\left[1+\underline{O}\left(\lambda^{-1}\right)\right]$$

$$E=\exp\left(i\theta_{11}(x+x_0)-i\pi/4\right)\sqrt{\frac{\theta_{11}}{2\pi(x+x_0)}}.$$

Дальнейшее исследование задачи осуществлено на основе метода граничных элементов. Участок границы полости в одну длину волны разбивался на 20 элементов. Решение системы линейных алгебраических уравнений осуществлялось методом итераций. В качестве примера на рис. 2 приведены амплитуды радиального и тангенциального перемещений на границе круговой полости в двухслойной полуплоскости в зависимости от угла φ при $h/a=19$ и параметрах задачи: $\theta_{11}=1.5$, $\theta_{12}=3$, $\theta_{21}=3$, $\theta_{22}=6$, $h_2/a=1$, $y_*/a=5$ $\mu=1000\,\text{МПа}$. На рис. 3 отражен характер концентрации напряжений σ_φ на поверхности полости, полученных численным дифференцированием соответствующих поверхностных смещений.

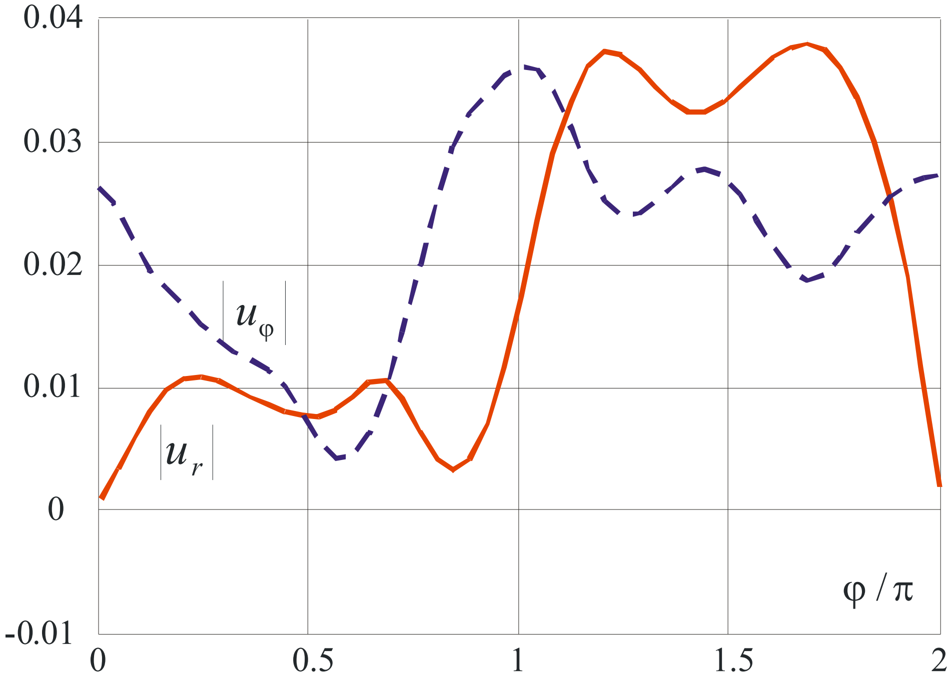

Рис. 2

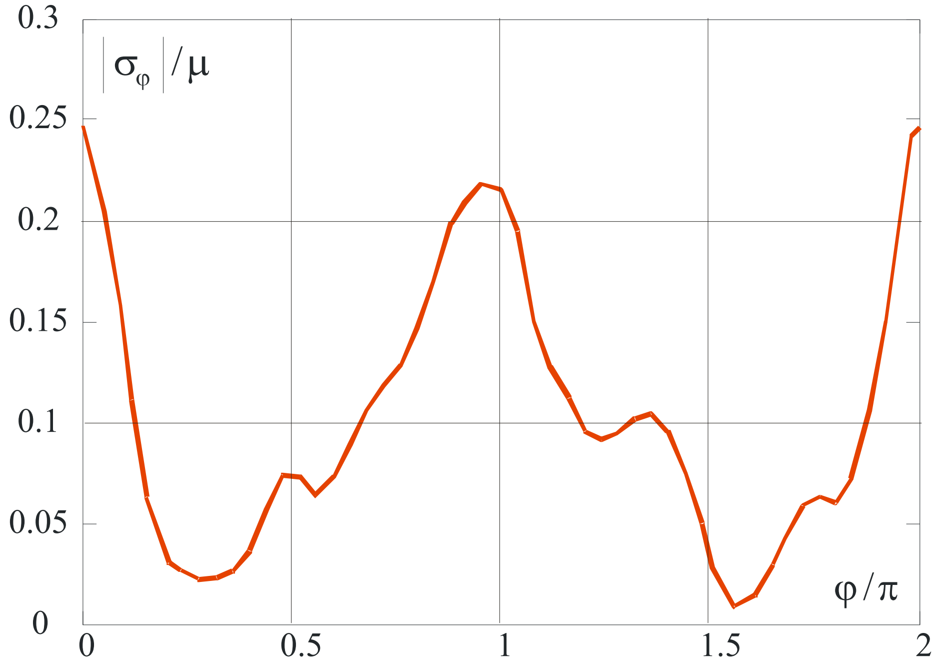

Рис. 3

Литература:

1. Гузь, А.Н. Дифракция упругих волн [Текст]: Монография / Гузь, А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. -Киев: Наук.думка, 1978. –308 с.

2. Ляпин А.А. Возбуждение волн в слоистом полупространстве со сферической полостью [Текст] // Изв. АН СССР, МТТ. –1991. –№3. –С.76-81.

3. R.A. Roberts Elastodynamic scattering by a surface-breaking void // J.Acoust.Soc.Am. –1989. –85, 2. – P.561-566.

4. Ляпин А.А. О возбуждении волн в слоистой среде с локальным дефектом [Текст] // ПМТФ. –1994. –Т.35. –№.5. –С.87-91.

5. Gautesen A.K. Asymptotic solution to the crack-opening displacement integral equations for the scattering of plane waves by cracks. I. The symmetric problem. // J.Acoust. Soc. Amer. -1990. -87, N3. -P.937-942.

6. Ляпин А.А., Селезнев М.Г. К построению решений динамических задач для слоистых сред нерегулярной структуры [Текст] // Экологический вестник научных центров ЧЭС, №2, 2006. –С. 37-39.

7. Кадомцев М.И., Ляпин А.А., Селезнев М.Г. Исследование динамики заглубленных фундаментов методами граничных и конечных элементов [Текст] // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 3. – С.61–64.

8. Кадыров Р.Р., Ляпин А.А. Особенности возбуждения слоистых сред внутренними источниками колебаний [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №3. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2009/250 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

9. Кадомцев М.И., Ляпин А.А., Тимофеев С.И. К вопросам построения эффективных алгоритмов расчета системы «сооружение-грунт» [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №1. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2009/250 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Федорюк, М.В. Асимптотика: интегралы и ряды [Текст]: Монография

/ М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.