

Построение вероятностной модели линейного оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса

Л.Ю. Фадеева

*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ*

Аннотация: Методами спектрального анализа случайных процессов, теории функций комплексного переменного и с использованием стохастических дифференциально – разностных уравнений получены явные формулы для спектральной характеристики и оптимального линейного оператора фильтрации с прогнозом для стохастических L-марковских процессов. Построен интересный для технических приложений пример оптимального оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью, обобщающей рациональную. Показано, что оператор фильтрации с прогнозом представляет собой сумму линейной комбинации значений принимаемого сигнала в некоторые моменты времени и интеграла от экспоненциально затухающей весовой функции.

Ключевые слова: случайный процесс, L-марковский процесс, фильтрация с прогнозом, спектральная характеристика, оператор фильтрации.

Введение. Фильтрация случайных процессов находит широкое применение в радиоэлектронике, телекоммуникациях, при обработке сигналов в системах управления, навигации, радиолокации, в физике полупроводников, при медицинской диагностике, в финансовом и инвестиционном менеджменте и т.д [1,2].

Значение оператора фильтрации с прогнозом особенно актуально в условиях растущего объема данных, развития цифровых технологий и потребности в адаптивных системах управления и анализа, где важно не только оценивать текущее состояние объекта, но и предсказывать его поведение. Прогноз повышает устойчивость и быстродействие системы. Фильтрация с прогнозом обеспечивает оценку состояния даже при неполных или зашумленных измерениях, что особенно ценно в сложных технических и природных условиях. В задачах цифрового моделирования и управления оператор фильтрации с прогнозом применяется для мониторинга и

оптимизации технологических процессов, помогает уточнять состояние модели в режиме реального времени и оперативно реагировать на изменения.

В теории случайных процессов фильтрация заключается в определении состояния изучаемой системы по неполному и потенциально зашумленному набору наблюдений, например, в навигации фильтрация дает возможность определить истинное местоположение объекта по зашумленным спутниковым данным.

Использование L-марковских процессов, обобщающих марковские процессы, позволяет более точно моделировать, отфильтровывать и прогнозировать поведение сложных систем.

Известный специалист в области теории вероятностей и случайных процессов Е. Вентцель дала следующее образное определение марковского процесса: ««Будущее» марковского процесса зависит от «прошлого» лишь через «настоящее»», имея ввиду, что прогнозное значение марковского процесса определяется его значением в последний известный исследователю момент времени. По аналогии с вышесказанным, опираясь на определение L-марковского процесса, впервые данное в [3,4], можно дать следующее подобное определение: «Будущее L-марковского процесса зависит от его прошлого лишь через их общую L-границу». Здесь имеется ввиду, что прогнозное значение L-марковского процесса определяется его значениями в конечном интервале, предшествующем моменту упреждения.

Целью данной работы является вывод явной формулы линейного оператора фильтрации с прогнозом для L-марковских процессов с квазирациональной спектральной плотностью.

Методы решения задачи. Задачи оптимальной линейной фильтрации, экстраполяции и интерполяции допускают эффективные решения, задаваемые явными формулами для оптимальных линейных операторов фильтрации, экстраполяции и интерполяции в случае, когда спектральные

плотности исследуемых процессов являются рациональными функциями [5]. Этот факт хорошо известен, менее известно, что явные формулы экстраполяции могут быть получены для некоторых классов стационарных процессов с нерациональными спектральными плотностями [6-8], и практически неизвестны явные формулы фильтрации и интерполяции для процессов с нерациональным спектром.

В настоящей работе построен оператор фильтрации для процессов $\rho(t)$ с квазирациональным спектром вида:

$$f_{\rho\rho}(\omega) = 1 / \left| \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k} \right|^2, \quad (1)$$

где $Q_k(\omega)$ – многочлены степени q_k ; g_k – действительные числа:

$g_0 = 0 < g_1 < g_2 < \dots < g_m$ и все корни квазиполинома $G(\omega) = \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k}$

расположены в открытой верхней полуплоскости H^+ .

Известные математики Чеботарев и Мейман [9], исследовавшие свойства квазиполиномов, показали, что если все корни квазиполинома $G(\omega) = \sum c_{\nu, \mu} \cdot \omega^\nu \cdot e^{it_\mu \cdot \omega}$ расположены в верхней полуплоскости, то у этого квазиполинома $G(\omega)$ обязательно существует главный член, т.е. такой, в котором показатели ν и t_μ одновременно имеют наибольшие значения. Это означает, что в формуле (1) $q_0 \geq q_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Для интегрируемости спектральной плотности $f_{\rho\rho}(\omega)$ вида (1) необходимо также выполнение неравенства $q_0 - 1 \geq 0$.

Задача фильтрации (или сглаживания) заключается в следующем: требуется восстановить значения передаваемого (полезного) сигнала $\xi(s)$ в момент $t+\tau$ ($\tau \geq 0$ – фильтрация с прогнозом, $\tau < 0$ – фильтрация с запаздыванием) по известным в прошлом (т.е. при $s \leq t$) значениям принимаемого сигнала $\rho(s) = \xi(s) + \eta(s)$ с квазирациональной спектральной

плотностью вида (1). Принимаемый и передаваемый сигналы предполагаются стационарными и стационарно связанными процессами. Кроме того, предполагается, что стационарный процесс $\eta(s)$, так называемый случайный шум, имеет нулевое среднее значение $M\eta(s) \equiv 0$ и взаимно коррелирован с измеряемыми значениями полезного сигнала $\xi(s)$, который требуется выделить (отфильтровать) на фоне шума $\eta(s)$ при условии, что процессы $\eta(s)$ и $\xi(s)$ стационарно связаны и существует взаимная спектральная плотность $f_{\xi\eta}(\omega)$ этих процессов. Взаимная спектральная плотность процессов $\rho(s)$ и $\xi(s)$ является рациональной функцией вида:

$$f_{\xi\rho}(\omega) = 1/|S(\omega)|^2, \quad (2)$$

где $S(\omega)$ – многочлен степени n .

Целью поставленной задачи фильтрации является построение наилучшей линейной оценки вида:

$$\tilde{\xi}(t + \tau) = L \{ \rho(t - s), s \geq 0 \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{\tau}(\omega) dZ(\omega), \quad (3)$$

где L – линейный оператор фильтрации, $\Phi_{\tau}(\omega)$ – спектральная характеристика фильтрации, $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями из спектрального представления передаваемого сигнала

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega). \quad (4)$$

Процессы с квазирациональной спектральной плотностью (1) являются естественным расширением и вместе с тем существенным обобщением класса процессов с рациональным спектром. Они служат математической моделью случайных флуктуаций, происходящих в сложных системах дискретно–непрерывного типа, управляемых стохастическими дифференциально – разностными уравнениями вида:

$$\sum_{j=0}^m \mathcal{Q}_j \left(\frac{d}{dt} \right) \rho(t - g_j) = \frac{d}{dt} b(t),$$

где $b(t)$ – белый шум.

Кроме того, класс (1) представляет собой подкласс L-марковских процессов относительно семейства полубесконечных интервалов на прямой $L = [-g_m/2; g_m/2]$ [4]. А именно, в работе автора [7] доказано, что процесс со спектральной плотностью (1) является L-марковским, так как её знаменатель – квазиполином $|G(\omega)|^2$ – является целой функцией экспоненциального типа. Более того, при определенных значениях параметров g_k и $Q_k(\omega)$, $k = 0, 1, 2 \dots m$ класс (1) является подклассом фрактальных процессов, что показано в работе [7].

Построение наилучшей линейной оценки (3) заключалось в получении формулы для спектральной характеристики фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$ которая устанавливалась в соответствии с известными требованиями А. Яглома, доставляющими следующие *достаточные условия* того, чтобы некоторая функция комплексного переменного являлась спектральной характеристикой фильтрации [6]:

в случае ограниченной спектральной плотности $f_{pp}(\omega)$ для того, чтобы функция $\Phi_\tau(\omega)$ была спектральной характеристикой фильтрации, *достаточно выполнение следующих условий*: а) функция $\Phi_\tau(\omega)$ – аналитическая в нижней полуплоскости H^- и при $|\omega| \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости растет не быстрее, чем некоторая степень $|\omega|$; б) функция $\Psi_\tau(\omega) = e^{i\tau\omega} f_{\xi p}(\omega) - \Phi_\tau(\omega) \cdot f_{pp}(\omega)$ – аналитическая в верхней полуплоскости H^+ и при $|\omega| \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости убывает быстрее, чем $|\omega|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau(\omega)|^2 \cdot f_{pp}(\omega) < \infty$.

В работе [6] была построена спектральная характеристика фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$ в случае рациональных спектральных плотностей $f_{\xi p}(\omega)$ и $f_{pp}(\omega)$; в данной работе эти требования были эффективно применены для нахождения

спектральной характеристики фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$ с прогнозом, т.е. при $\tau > 0$ в случае квазирациональной спектральной плотности $f_{rp}(\omega)$ вида (1) и рациональной совместной спектральной плотности $f_{\xi p}(\omega)$ вида (2).

Поскольку функция $\Psi_\tau(\omega)$ согласно требованию б) не может иметь особенностей в H^+ , то числитель искомой спектральной характеристики $\Phi_\tau(\omega)$ должен содержать множитель, все нули которого сокращались бы с корнями квазиполинома $G(\omega)$, причем кратности этих корней должны совпадать. Более того, чтобы удовлетворить требованию в) и обеспечить выполнение требований аналитичности $\Phi_\tau(\omega)$ и $\Psi_\tau(\omega)$ в H^- и H^+ соответственно, целесообразно принять в качестве спектральной характеристики фильтрации с прогнозом ($\tau > 0$) и при $\tau = 0$ функцию вида:

$$\Phi_\tau(\omega) = [P_0(\omega) \cdot G(\omega)] / S(\omega) = [P_0(\omega) \cdot \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k}] / S(\omega) \quad (5)$$

В формуле (5) $P_0(\omega)$ – многочлен степени $n - 1$ (n – степень $S(\omega)$).

Нетрудно видеть, что такой выбор степени полинома $P_0(\omega)$ одновременно обеспечит необходимый порядок роста $\Phi_\tau(\omega)$ в H^- и убывания $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+ .

Аналитичность функции $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+ (требование б) обеспечивается следующим образом. Выпишем окончательную формулу для $\Psi_\tau(\omega)$, учитывая вид (5) для $\Phi_\tau(\omega)$:

$$\Psi_\tau(\omega) = e^{i\tau\omega} \cdot \frac{1}{|S(\omega)|^2} - \frac{P_0(\omega) \cdot \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k}}{S(\omega)} \cdot \frac{1}{|G(\omega)|^2} = \frac{e^{i\tau\omega} \cdot \bar{G}(\omega) - P_0(\omega) \bar{S}(\omega)}{|S(\omega)|^2 \cdot \bar{G}(\omega)} \quad (6)$$

Из этой формулы видим, что поскольку все корни квазиполинома $\bar{G}(\omega)$ и полинома $\bar{S}(\omega)$ расположены только в нижней полуплоскости H^- , то, чтобы функция $\Psi_\tau(\omega)$ не имела корней в верхней полуплоскости H^+ , достаточно того, чтобы её числитель обращался в нуль во всех n корнях

многочлена $S(\omega)$ из H^+ . Это приводит к системе n линейных алгебраических уравнений, доставляемых условием $\left[e^{i\tau\omega} \cdot \bar{G}(\omega) - P_0(\omega) \bar{S}(\omega) \right]_{\omega=\gamma_k} = 0$, где γ_k – корни полинома $S(\omega)$ из H^+ .

Результаты работы. Продемонстрируем применение формул (3-6) для построения спектральной характеристики фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$ на примере спектральных плотностей:

$$f_{\xi p}(\omega) = 1/|S(\omega)|^2 = 1/[\omega^2 + \gamma^2], \quad (7)$$

где $\gamma > 0$, а спектральная плотность принимаемого сигнала является квазирациональной спектральной плотностью вида:

$$f_{pp}(\omega) = 1/|V(\omega)|^2 = 1/|V_0(\omega) + V_1(\omega)e^{-i\omega} + V_2(\omega)e^{-2i\omega}|^2. \quad (8)$$

В формуле (8) многочлены $V_0(\omega)$, $V_1(\omega)$ и $V_2(\omega)$ имеют вид:

$$V_0(\omega) = \omega(b - ci) + d\omega + a - c - id = A\omega + B; \quad V_1(\omega) = 2a;$$

$$V_2(\omega) = \omega(d - ci - bi) + a + c + di = C\omega + D, \text{ то есть комплексные числа } A, D,$$

$$C, D \text{ равны: } A = d + i(b - c); \quad B = a - c - id; \quad C = d - ci - bi; \quad D = a + c + di,$$

а действительные числа a, b, c и d связаны неравенствами:

$$b > a > 0, \quad c > 0, \quad d > 0, \quad (9)$$

обеспечивающими принадлежность всех корней квазиполинома $V(\omega) = V_0(\omega) + V_1(\omega)e^{-i\omega} + V_2(\omega)e^{-2i\omega}$ верхней полуплоскости. Факт достаточности условий (9) для принадлежности корней квазиполинома верхней полуплоскости доказан автором в работе [10] и является существенным допущением при построении спектральной характеристики фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$, являющейся главной частью в формуле оптимального оператора фильтрации.

Итак, в соответствии с достаточными условиями, наложенными выше на скорости возрастания функции $\Phi_\tau(\omega)$ в нижней полуплоскости H^- (пункт а) и убывания связанной с ней функции:

$$\Psi_{\tau}(\omega) = e^{i\tau\omega} f_{\xi\rho}(\omega) - \Phi_{\tau}(\omega) \cdot f_{\rho\rho}(\omega) \quad (10)$$

в верхней полуплоскости H^{+} (пункт б), приходим к заключению, что спектральную характеристику фильтрации с прогнозом следует рассматривать в виде:

$$\Phi_{\tau}(\omega) = [\alpha \cdot V(\omega)] / [\omega - \gamma i] \quad (11)$$

($\gamma > 0$ по определению многочлена $S(\omega) = \omega - \gamma i$).

Нетрудно видеть, что, поскольку $\tau > 0$, то $\Phi_{\tau}(\omega)$ будет возрастать в H^{-} при $|\omega| \rightarrow \infty$ не быстрее, чем некоторая степень $|\omega|$, а функция

$$\Psi_{\tau}(\omega) = [e^{i\tau\omega} \bar{V}(\omega) - \alpha \cdot (\omega + \gamma i)] / [(\omega^2 + \gamma^2) \bar{V}(\omega)] \quad (12)$$

будет убывать в H^{+} быстрее, чем $|\omega|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. В формулах (11) – (12) α – неизвестное пока число. Таким образом, требования а) и б), касающиеся характера роста $\Phi_{\tau}(\omega)$ и убывания $\Psi_{\tau}(\omega)$, выполнены.

Чтобы удовлетворить и требованиям аналитичности $\Phi_{\tau}(\omega)$ в H^{-} и $\Psi_{\tau}(\omega)$ в H^{+} , достаточно потребовать обращения в нуль числителя функции $\Psi_{\tau}(\omega)$ в полюсах этой функции, принадлежащих верхней полуплоскости, т.е. в точке $\omega = \gamma i$.

Из формулы (11) видим, что поскольку $\omega = \gamma i \in H^{+}$ и, значит, полюсов функции $\Phi_{\tau}(\omega)$ в H^{-} нет, то эта функция будет аналитической в нижней полуплоскости.

Итак, число α в формуле (12) находится из уравнения: $[e^{i\tau\omega} \cdot \bar{V}(\omega) - \alpha \cdot (\omega + \gamma i)]_{\omega=\gamma i} = 0$, решая которое, найдем:

$$\alpha = -(e^{-\gamma\tau}/2\gamma) [\bar{B}i - \bar{A}\gamma + 2aie^{-\gamma} + (\bar{D}i - \bar{C}\gamma)e^{-2\gamma}]. \quad (13)$$

Таким образом, спектральная характеристика фильтрации с прогнозом ($\tau > 0$) имеет вид (11), где комплексное число α задается формулой (13).

Чтобы получить оптимальный оператор фильтрации с прогнозом, подставим в формулу (3) представление спектральной характеристики фильтрации в виде (11):

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(t; \tau) = L \{ \rho(t-s), s \geq 0 \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \frac{\alpha \cdot (A\omega + B)}{\omega - \gamma i} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a\alpha e^{i\omega(t-1)}}{\omega - \gamma i} dZ(\omega) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(C\omega + D)e^{i\omega(t-2)}}{\omega - \gamma i} dZ(\omega) = J_1 + J_2 + J_3.\end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл J_1 :

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \frac{(A\omega\alpha - \alpha A\gamma i + \alpha A\gamma i + \alpha B)}{\omega - \gamma i} dZ(\omega) = \alpha A \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega) + (\alpha A\gamma i + \alpha B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\omega} dZ(\omega)}{\omega - \gamma i} \quad (14)$$

Первый интеграл в (14) согласно спектральному представлению (4) принимаемого сигнала $\rho(s)$ представляет собой значение этого сигнала в точке $s = t$: $\rho(t)$. Дробь $[1/(\omega - \gamma i)]$ во втором интеграле в формуле (14) заменим несобственным интегралом вида: $1/(\omega - \gamma i) = i \int_0^{\infty} e^{-(\gamma + i\omega)s} ds$. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\omega} dZ(\omega)}{\omega - \gamma i} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \cdot i \int_0^{\infty} e^{-(\gamma + i\omega)s} ds dZ(\omega) = i \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dZ(\omega) \right]$$

В квадратной скобке в силу формулы (4) имеем значение сигнала $\rho(u)$ в точке $u = t - s$ и потому интеграл J_1 равен:

$$J_1 = \alpha A \cdot \rho(t) + i(\alpha A\gamma i + \alpha B) \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \rho(t-s) ds$$

Интегралы J_2 и J_3 находятся аналогично:

$$J_2 = 2a\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-1)}}{\omega - \gamma i} dZ(\omega) = 2a\alpha i \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \rho(t-1-s) ds;$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(C\omega + D)e^{i\omega(t-2)}}{\omega - \gamma i} dZ(\omega) = \alpha C \rho(t-2) + i(\alpha C\gamma i + \alpha D) \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \rho(t-s-2) ds.$$

Итак, оптимальный оператор фильтрации задается формулой:

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = J_1 + J_2 + J_3 = \alpha [A\rho(t) + C\rho(t-2)] + \sum_{j=0}^2 F_j \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \rho(t-s-j) ds, \quad (15)$$

$$\text{где} \quad F_0 = \alpha(Bi - A\gamma); \quad F_1 = 2a\alpha i; \quad F_2 = \alpha(Di - C\gamma), \quad (16)$$

число α задается формулой (13), а числа A, B, C, D определены в объяснении к формуле (8).

Заключение. Таким образом, в работе построена стохастическая модель оптимального оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью. При решении задачи фильтрации использовались методы построения спектральных характеристик, разработанные математиком А. М. Ягломом, теория функций комплексного переменного и спектральный анализ случайных процессов. Показано, что оператор фильтрации с прогнозом представляет собой сумму линейной комбинации значений принимаемого сигнала в некоторые моменты времени и интеграла от экспоненциально затухающей весовой функции. Оператор фильтрации с прогнозом может быть реализован в аналоговом частотно-селективном тракте радиоприемника с адаптивной полосой пропускания; в адаптивном фазовом автоподстройщике частоты; в качестве слеящего фильтра за движущимися объектами в КВ-связи; в GPS-приемниках и других радиосистемах.

Литература

1. Приймак А.А. Реализация адаптации экстремальной фильтрации к реальному времени // Инженерный вестник Дона. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.
2. Мисюра В.В., Мисюра В.И. Обработка и распознавание сигналов. Современное состояние проблемы // Инженерный вестник Дона. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.

3. Розанов Ю.А. О гауссовских полях с заданными условными распределениями // Теория вероятностей и её применения, 1967. т.12. №3. С.433 – 443.

4. Молчан Г.М. L-марковские гауссовские поля // ДАН СССР, 1974, Т. 215, №5, 1974. С.1054-1057.

5. Товстик Т.М. Фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью. // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2004, вып. 1 (№1). С. 55 – 60.

6. Yaglom A.M. An Introduction to the Teory of Stationaty Random Functions/ A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

7. Фадеева Л. Ю. Построение стохастической модели линейного экстраполятора для L-марковского фрактального процесса // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2025. № 1 (65). С. 46–54. DOI: doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46; EDN: RXISUS.

8. Фадеева Л.Ю. Экстраполяция видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью. // Инженерный вестник Дона. 2025. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082.

9. Чеботарёв Н.Г, Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Труды математического института им. В.А Стеклова, Т.26. Изд-во АН СССР. М., Л. 1949. 331с.

10. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системы. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.

References

1. Prijmak A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.
2. Misjura V.V., Misjura V.I. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
3. Rozanov Ju.A. Teorija verojatnostej i ejo primenenija, 1967. t.12. №3. pp.433 - 443
4. Molchan G.M. DAN SSSR, 1974, T. 215, №5, 1974. pp.1054-1057.
5. Tovstik T.M. Vestnik SPbGU. Ser. 1, 2004, vyp. 1 (№1). pp. 55 – 60.
6. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.
7. Fadeeva L. Ju. Vestnik Povolzhskogo gosudarstvennogo tehnologicheskogo universiteta. Ser.: Radiotekhnicheskie i infokommunikacionnye sistemy. 2025. № 1 (65). pp. 46–54. DOI: doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46; EDN: RXISUS.
8. Fadeeva L.Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082.
9. Chebotarjov N.G, Mejman N.N. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A Steklova, T.26. Izd-vo AN SSSR. M., L. 1949. 331p.
10. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyju. T.4. №4 (2024): vypusk 14. pp. 1-8.

Дата поступления: 16.06.2025

Дата публикации: 26.07.2025