Локально – неравновесный теплообмен в стержне в условиях вынужденной конвекции

А.В. Еремин

Самарский государственный технический университет, Самара

Аннотация: На основе теории двухфазного запаздывания разработана математическая модель теплопроводности в стержне произвольного сечения в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой. При выводе дифференциального уравнения, описывающего процесс переноса теплоты в локально – неравновесных условиях, использовалась формула закона Фурье, учитывающая однократную релаксацию как теплового потока, так и градиента температуры. Анализ результатов численных расчетов распределения температуры по длине стержня позволил определить зависимость оптимальной длины стержня от интенсивности теплообмена с его боковой поверхности.
Ключевые слова: интенсификация теплообмена, граничные условия третьего рода, пространственно – временная нелокальность, теория двухфазного запаздывания, метод конечных разностей.

В промышленности широко используются различного рода теплообменные аппараты, предназначенные для передачи теплоты от одной среды (газ, жидкость, расплавленный металл и проч.) к другой. Их эффективность характеризуется количеством теплоты, передаваемой через единицу площади в единицу времени, которое зависит от многих факторов: геометрической формы поверхностей (ребра, стержни, шипы, лунки и проч.); физических свойств материала теплообменника и омывающих сред; коэффициентов теплоотдачи, зависящих от скоростей течения сред [1, 2]. С целью интенсификации теплообмена во многих случаях применяются стержни, расположенные перпендикулярно теплопередающей поверхности, преимущество которых состоит в максимальной простоте конструкции. Однако их тепловой расчёт в нестационарных режимах работы связан со значительными трудностями ввиду необходимости решения краевой задачи для дифференциального уравнения, включающего слагаемое, учитывающее конвективный теплообмен стержня с окружающей средой [3].

Особый интерес представляют теплообменные процессы, протекающие в локально – неравновесных условиях. К таким процессам относятся быстропротекающие процессы, продолжительность которых сопоставима с временем релаксации τ, а также любые другие процессы, рассматриваемые на весьма малых начальных временных участках [4 – 9].

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения теплопроводности для конечного стержня произвольного сечения в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой с учетом локальной неравновесности (рис. 1). Для этого модифицируем закон Фурье вида $q = -\lambda \partial T / \partial x$ так, чтобы в нем было учтено изменение во времени градиента температуры и теплового потока [6 – 9]

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \right) - \tau \frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (1)$$

Запишем соотношение теплового баланса для элементарного участка стержня, с учетом теплообмена на боковой его поверхности [3]

$$c\rho S \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta t = -S \frac{\partial q}{\partial x} \Delta x \Delta t + \alpha_1 p (T_{\text{ср}} - T) \Delta x \Delta t, \qquad (2)$$

p – периметр; α_1 – коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности; S – площадь сечения; $T_{\text{ср}}$ – температура среды.

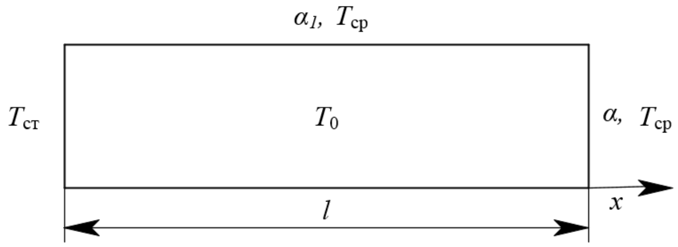

Рис. 1. – Схема теплообмена в стержне

Разделим обе части уравнения (2) на $c\rho S \Delta x \Delta t$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\alpha_1 p}{c\rho S} (T_{\text{ср}} - T). \qquad (3)$$

Подставляя (1) в (3), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\tau_1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)+a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+a\tau_2\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}+b(T_{\text{ср}}-T),\qquad(4)$$

где $b=(\alpha_1 p)/(c\rho S)$ – константа; $a=\lambda/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

Выразим из (3) $\partial q/\partial x$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-c\rho\frac{\partial T}{\partial t}+bc\rho(T_{\text{ср}}-T).\qquad(5)$$

Подставим (5) в (4)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\tau_1 b-\frac{\partial T}{\partial t}+a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+a\tau_2\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}+b(T_{\text{ср}}-T).\qquad(6)$$

Уравнение (6) можно записать в виде

$$(1+\tau_1 b)\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\tau_2\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}\right)+b(T_{\text{ср}}-T).\qquad(7)$$

Краевые условия для случая, когда на одном из торцов стержня поддерживается постоянная температура (граничные условия первого рода), а на втором торце стержня теплообмен происходит при граничных условиях третьего рода (причем коэффициенты теплоотдачи с боковой поверхности и с торца не равны) имеют вид

$$T(x,0)=T_0;\quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=0;\quad T(0,t)=T_{\text{ст}};\quad \lambda\frac{\partial T(l,t)}{\partial x}=\alpha(T_{\text{ср}}-T),\qquad(8)$$

где T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стержня при $x=0$; α – коэффициент теплоотдачи на торце стержня.

Обозначим:

$$\Theta=\frac{T-T_{\text{ср}}}{T_0-T_{\text{ср}}};\quad \text{Fo}=\frac{at}{\delta^2};\quad \xi=\frac{x}{\delta};\quad \text{Fo}_1=\frac{a\tau_1}{\delta^2};\quad \text{Fo}_2=\frac{a\tau_2}{\delta^2};$$

$$\text{Bi}=\frac{\alpha l}{\lambda};\quad D=\frac{T_{\text{ст}}-T_{\text{ср}}}{T_0-T_{\text{ср}}};\quad B=bl^2/a;\quad D=\frac{T_{\text{ст}}-T_{\text{ср}}}{T_0-T_{\text{ср}}};\quad \text{Fo}_3=1+b\tau_1.$$

Задача (7), (8) с учетом обозначений будет

$$\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+\mathrm{Fo}_3\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+\mathrm{Fo}_2\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}-B\Theta\,; \tag{9}$$

$$\Theta(\xi,0)=1\,;\ \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=0\,;\ \Theta(0,\mathrm{Fo})=D\,;\ \frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}\Theta(1,\mathrm{Fo})=0\,. \tag{10}$$

Если положить $\tau_1=\tau_2=0$, то уравнение (9) приводится к классическому уравнению для стержня с учетом теплообмена на боковой поверхности

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+-B\Theta\,.$$

При решении задачи (9), (10) численным методом введем пространственно – временну́ю сетку с шагами $\Delta\xi$, $\Delta\mathrm{Fo}$ по переменным ξ, Fo так, что

$$\xi_i=i\Delta\xi,\quad i=\overline{0,I}\,;\ \mathrm{Fo}_k=k\,\Delta\mathrm{Fo},\quad k=\overline{0,K}\,, \tag{11}$$

где I, K – число шагов по координатам ξ, Fo.

На сетке (11) введем сеточные функции $\Theta_i^k=\Theta(\xi_i,\mathrm{Fo}_k)$ [10]. Используя явную схему аппроксимации, задача (9), (10) может быть записана в виде

$$\mathrm{Fo}_1\frac{\Theta_i^{k-1}-2\Theta_i^k+\Theta_i^{k+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}+\mathrm{Fo}_3\frac{\Theta_i^{k+1}-\Theta_i^k}{\Delta\mathrm{Fo}}=\frac{\Theta_{i-1}^k-2\Theta_i^k+\Theta_{i+1}^k}{\Delta\xi^2}+$$

$$+\mathrm{Fo}_2\frac{\Theta_{i-1}^{k+1}-2\Theta_i^{k+1}+\Theta_{i+1}^{k+1}-\Theta_{i-1}^k+2\Theta_i^k-\Theta_{i+1}^k}{\Delta\xi^2\Delta\mathrm{Fo}}-B\Theta_i^k\,; \tag{12}$$

$$\Theta_i^0=0\,;\quad \Theta_i^0=\Theta_i^1\,;\quad \Theta_0^k=D\,;\quad \frac{\Theta_I^k-\Theta_{I-1}^k}{\Delta\xi^2}+\mathrm{Bi}\,\Theta_I^k=0\,. \tag{13}$$

Результаты решения задачи (12), (13) представлены на рис. 2 – 4.

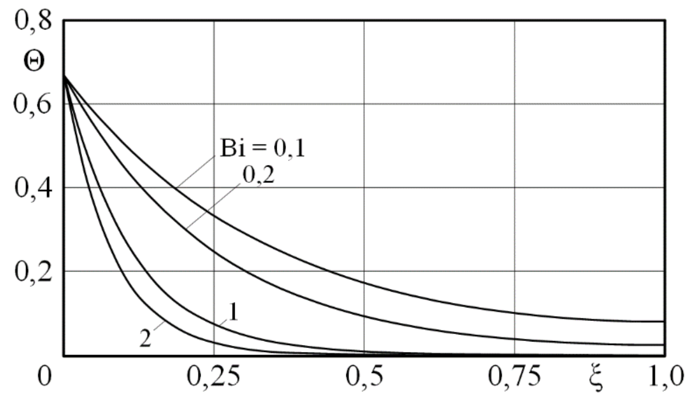

Рис. 2. – Распределение температуры в стержне:
$\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $D = 0{,}667$; $B = 160$

Анализ результатов численных расчетов распределения температуры по длине стержня позволяет заключить, что при высокой интенсивности теплообмена ($\mathrm{Bi} > 0{,}5$) часть стержня принимает температуру окружающей среды (см. рис. 2). Так, например, при $\mathrm{Bi} = 1$ безразмерная температура в диапазоне значений $0{,}6 \le \xi \le 1$ равна нулю. При этом тепловой поток в направлении оси стержня на этом участке отсутствует. Таким образом, дальнейшее увеличение длины стержня не приводит к увеличению теплового потока в направлении оси стержня, т.е. существует оптимальная длина стержня, при которой тепловая мощность стержня (шипа, ребра) перестает увеличиваться. На рис. 3 представлена зависимость оптимальной длины ξ стержня от Bi.

В статье также выполнена оценка влияния коэффициентов релаксации на процесс теплообмена в стержне. На рис. 4 приведены результаты расчетов температуры в неустановившемся процессе теплообмена. Их анализ позволяет заключить, что учет релаксационных свойств оказывает наибольшее влияние на процесс теплообмена в диапазоне временной переменной $0 < \mathrm{Fo} \le 0{,}2$. С течением времени расхождение результатов расчетов при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$ и $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$ уменьшается и не превышает 5%.

Процесс установления граничных условий первого рода составляет $\Delta\mathrm{Fo} \approx 0{,}2$.

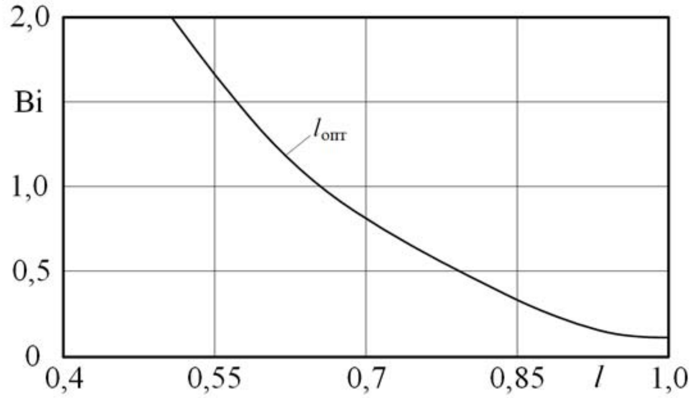

Рис. 3. – Зависимость оптимальной длины стержня от Bi:

$\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $D = 0{,}667$; $B = 160$

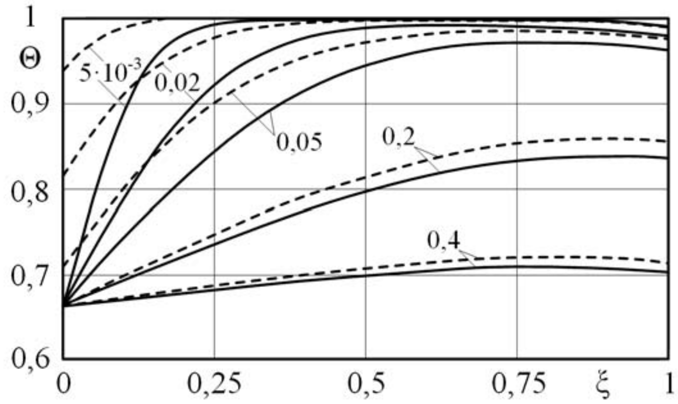

Рис. 4. – Распределение температуры в стержне:

$D = 0{,}667$; $B = 0{,}312$; 1 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; 2 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках научного проекта № 18-38-00029 мол_а и Совета по грантам Президента РФ в рамках научного проекта МК–2614.2019.8.

Литература

1. Кудинов И.В., Еремин А.В., Сичинава Г.В., Бранфилева А.Н., Ткачев В.К., Курганова О.Ю. Экспериментальное исследование мощности газоводяных теплообменников // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки». Самара, 2017. №2(54). С.146 – 153.

2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

3. Араманович И.Г, Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.

4. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно – физический журнал. 1965. Т. 9. № 3. С. 287.

5. Liu K.C., Chang P.C. Analysis of Dual-Phase-Lag Heat Conduction in Cylindrical System with a Hybrid Method // Appl. Mathem. Modeling. 2007. V. 31. P. 369.

6. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Критические условия теплового взрыва с учетом пространственно-временнóй нелокальности // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. № 2. С. 100 – 104.

7. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю., Юдахин А.Е. Метод измерения тепловой релаксации в твердом теле // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 3. С. 446 – 454.

8. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю., Юдахин А.Е. Измерение времени тепловой релаксации и демпфирования температуры в твердом теле // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 1. С. 122 – 128.

9. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Strongly Nonequilibrium Model of Thermal Ignition with Account for Space – Time Nonlocality // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2018. V. 54(6). Pp. 649 – 653.

10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

References

1. Kudinov I.V., Eremin A.V., Sichinava G.V., Branfileva A.N., Tkachev V.K., Kurganova O. Ju. Vestnik SamGTU. Serija «Tehnicheskie nauki». Samara, 2017. №2(54). Pp.146 – 153.
2. Lykov A.V. Teorija teploprovodnosti [Heat conduction theory]. M.: Vysshaja shkola, 1967. 600 p.
3. Aramanovich I.G, Levin V.I. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1969. 288 p.
4. Lykov A.V. Inzhenerno – fizicheskij zhurnal. 1965. V. 9. № 3. p. 287.
5. Liu K.C., Chang P.C. Appl. Mathem. Modeling. 2007. V. 31. P. 369.
6. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaja tehnika. 2018. № 2. Pp. 100 – 104.
7. Kirsanov Ju.A., Kirsanov A.Ju., Judahin A.E. Teplofizika vysokih temperatur. 2018. V. 56. № 3. Pp. 446 – 454.
8. Kirsanov Ju.A., Kirsanov A.Ju., Judahin A.E. Teplofizika vysokih temperatur. 2017. V. 55. № 1. Pp. 122 – 128.
9. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Combustion, Explosion and Shock Waves. 2018. V. 54(6). Pp. 649 – 653.
10. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods]. M.: Nauka, 1978. 512 p.