

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругого массива вблизи сферической полости с учетом технологической неоднородности его механических свойств

Д.В. Гоцев, Е.Н. Свиридова

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Аннотация: Разработана математическая модель и найдены аналитические решения, описывающие центрально симметричное напряженно-деформированное состояние горного массива вблизи подземной сферической полости с учетом технологической неоднородности пород приконтурной области. При этом технологическая неоднородность упругих свойств материала горного массива моделировалась радиально неоднородным модулем упругости при постоянном коэффициенте Пуассона. Переменный модуль упругости для неоднородных горных пород аппроксимировался обобщенным полиномом с неопределенными коэффициентами. На основе экспериментальных данных проведен численный расчет компонент напряженно-деформированного состояния для рассматриваемой задачи, выявлены характерные эффекты.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, горный массив с технологической неоднородностью, подземная сферическая полость, математическая модель.

Введение

Одной из основных задач механики горных пород является научное обоснование процессов и явлений, происходящих в породном массиве, вблизи незакрепленных горных выработок и подземных полостей [1–6]. Выбор способа искусственного упрочнения горных пород в приконтурных областях и расчет несущей способности ограждающих упрочненных породных массивов обеспечивает безопасность строительных работ и нормальное эксплуатационное состояние выработок. В качестве примера наиболее сложных инженерных задач по расчету упрочненных породных массивов можно привести расчет подземных полостей, сооружаемых взрывом камуфлетных зарядов [7–14].

Исследование механических процессов, протекающих в горном массиве, может быть выполнено с помощью экспериментов (как лабораторных, так и натуральных) и аналитическими методами. Отметим, что

информация, получаемая в результате натурных исследований, хотя и является весьма ценной для понимания механических процессов в породных массивах, имеет региональный характер, то есть отражает специфику горнотехнических условий эксперимента. Аналитические же методы обладают наибольшей универсальностью при моделировании механических процессов и свободны от влияния частных факторов. Кроме этого аналитические методы позволяют исследовать механические процессы в более широком диапазоне, то есть позволяют не только качественно, но и количественно прогнозировать проявления горного давления.

Естественная неоднородность наблюдается практически во всех породных массивах. Изучение естественной неоднородности, характеризуемой различием деформационных свойств массива в различных его точках, сопряжено со значительными техническими трудностями по отбору образцов породы во многих точках массива. В настоящее время такие экспериментальные данные ограничены. Искусственная неоднородность появляется в процессе технологического воздействия на породный массив при сооружении горных выработок и разработке полезных ископаемых, в частности при буровзрывной выемке породы в горных выработках [13,15]. Первоначально однородно-изотропный массив в результате производства буровзрывных работ приобретает технологическую неоднородность деформационных характеристик.

Постановка задачи

Изучение напряженно-деформированного состояния неоднородных сред будем осуществлять с позиций классической линейной теории упругости неоднородного тела. При этом имеют место следующие основные уравнения механики сплошной среды:

– уравнения равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i + \rho(x^s) F_i = 0; \quad (1)$$

– соотношения Коши

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j; \quad (2)$$

– закон Гука

$$\sigma_j^i = \lambda(x^s) \varepsilon_\alpha^\alpha g_j^i + 2\mu(x^s) \varepsilon_j^i. \quad (3)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения $x^s (x^1, x^2, x^3)$ – произвольная криволинейная система координат трехмерного евклидова пространства; по повторяющимся индексам проводится суммирование, свободные индексы принимают независимо значения 1, 2, 3; $\sigma_j^i, \varepsilon_j^i, g_j^i$ – смешанные компоненты симметричных тензоров напряжений, деформаций и метрического тензора соответственно; u_i – компоненты вектора перемещений; F_i – компоненты вектора плотности массовых сил; $\rho(x^s)$ – плотность неоднородного материала; символы ∇_i и ∇^i обозначают ковариантное и контрвариантное дифференцирование по i -ой координате соответственно; $\lambda(x^s), \mu(x^s)$ – параметры Ламе неоднородного материала, представляющие собой непрерывные функции координат.

С точки зрения математического моделирования задача о распределении полей напряжений и перемещений в приконтурной области горного массива, содержащего подземную полость сферической формы, сводится к задаче определения напряженно-деформированного состояния неоднородного пространства в окрестности подземной сферической полости радиуса a (рисунок 1). Сжимающая нагрузка интенсивностью q_a равномерно распределенная по внутренней поверхности моделирует собой давление жидкости или газа на приконтурную область массива. На бесконечном удалении от рассматриваемой полости массив находится под действием

гидростатического поля напряжений, характеризуемого величиной gh (g – объемный вес вышележащих пород, h – глубина заложения). Задача, постановка которой приведена выше, являлась предметом исследования настоящей работы.

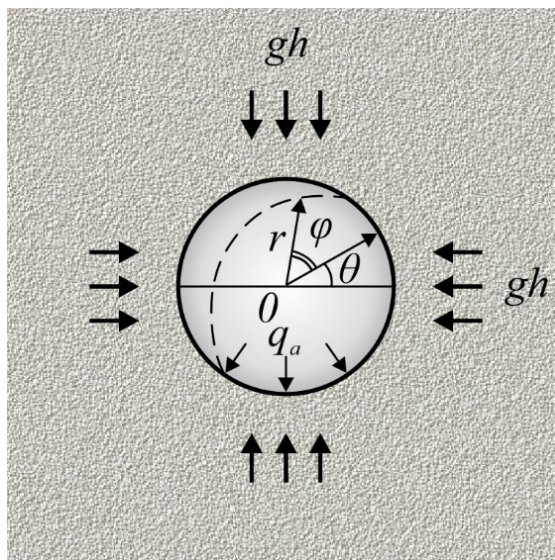


Рис. 1. – Упругое пространство со сферической полостью при равномерном всестороннем сжатии

При определении напряженно-деформированного состояния краевые эффекты, связанные с наличием дневной поверхности, не учитывались. Это предположение уместно для полостей, проведенных на достаточно больших глубинах.

Нахождение напряженно-деформированного состояния

Исходя из постановки задачи, в рассматриваемом случае имеет место центральная (полярная) симметрия. Напряженно-деформированное состояние горного массива вблизи подземной полости в сферической системе координат r, θ, φ будет описываться только главными ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также радиальной составляющей вектора перемещений, которые будут являться функциями радиальной координаты и в силу центральной симметрии удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r(r), \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r), \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_r(r), \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r) = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(r), \\ u &= u(r).\end{aligned}\tag{4}$$

Технологическую неоднородность упругих свойств материала горного массива будем моделировать радиально неоднородным модулем упругости $E(r)$ при постоянном значении коэффициента Пуассона ν . При этом имеет место следующая зависимость между упругими характеристиками материала

$$\mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)}, \quad \lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.\tag{5}$$

С учетом (4) три уравнения равновесия (1) преобразуются к одному

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0,\tag{6}$$

соотношения Коши (2) примут вид

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}.\tag{7}$$

Формулы (3) закона Гука, преобразуются к форме

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda(r) + 2\mu(r))\varepsilon_r + 2\lambda(r)\varepsilon_\theta, \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= \lambda(r)\varepsilon_r + 2(\lambda(r) + \mu(r))\varepsilon_\theta,\end{aligned}\tag{8}$$

Граничные условия в напряжениях для рассматриваемой задачи запишутся в форме

$$\sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad \sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -gh.\tag{9}$$

Уравнение равновесия (1) с учетом (7), (8) и (5) относительно перемещений переписывается в форме

$$E(r)r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + \left[r \frac{dE(r)}{dr} + 2E(r) \right] r \frac{du}{dr} + 2 \left[\nu_1 r \frac{dE(r)}{dr} - E(r) \right] u = 0, \quad (10)$$

где $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$.

Как отмечается в работах [15,16] распределение модуля упругости $E(r)$ в приконтурной зоне сферической полости в случае технологической неоднородности представляет собой немонотонные зависимости с выраженным максимумом вблизи ее стенок (рисунок 2).

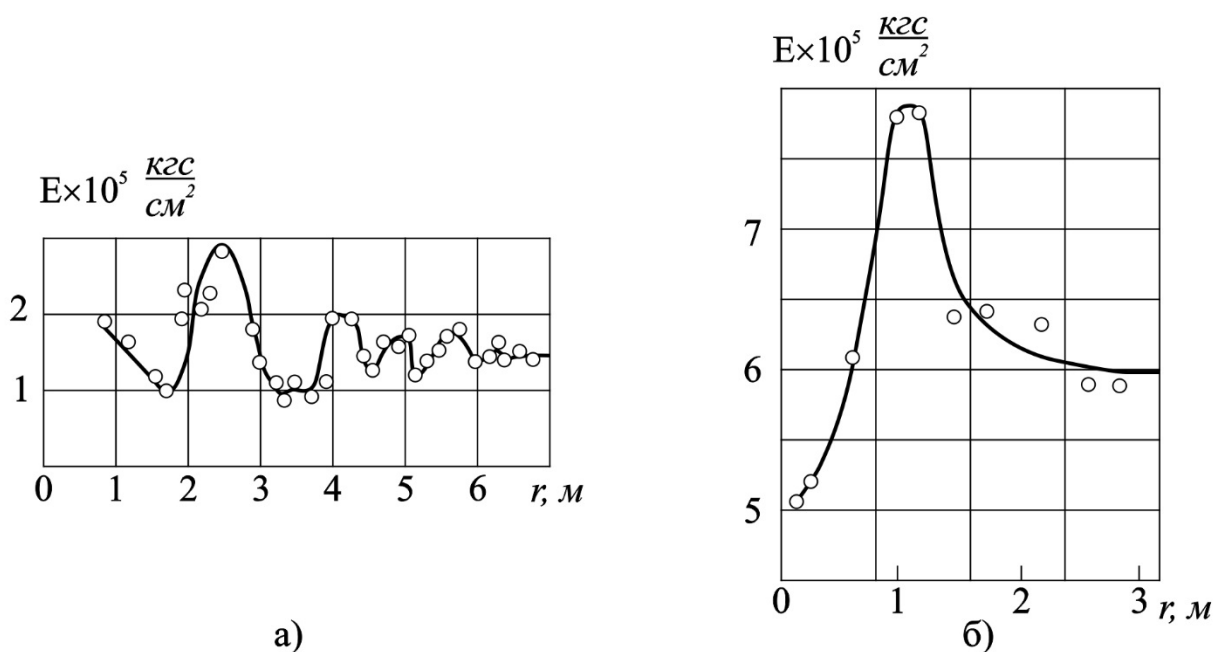


Рис. 2. – Экспериментальные значения модуля упругости $E(r)$ вблизи сферической полости, образованной а) буровзрывным способом в песчано-глинистом сланце ($h=187$ м); б) камуфлетным взрывом в песчанике на глубине ($h=375$ м).

В [16] переменный модуль упругости аппроксимировался полиномом по отрицательным степеням радиальной координаты. Однако данное представление накладывает существенные ограничения на получаемые в дальнейшем решения задачи о напряженно-деформируемом состоянии. В

отличии от [16], в настоящей работе предлагается аппроксимировать переменный модуль упругости $E(r)$ вблизи полости ($r < r^*$ – область существенной неоднородности) многочленом по положительным степеням радиальной координаты, тогда как при $r > r^*$ функция $E(r)$ будет совпадать с видом предложенным в [16]. В итоге получим

$$E(r) = \begin{cases} E_0 \sum_{i=0}^m e_i^{(1)} r^i, & a \leq r \leq r^*, \\ E_0 \sum_{i=0}^{n-m+1} e_i^{(2)} r^{-i}, & r \geq r^*, \end{cases} \quad (11)$$

где E_0 – значение модуля упругости в нетронутом массиве; $r^* = 4.6$ м – для случая а), $r^* = 1.7$ м – для случая б); $m, n-m$ – количество экспериментальных точек в областях $a \leq r \leq r^*$ и $r \geq r^*$ соответственно.

Далее по тексту все величины с размерностью длины отнесены к радиусу a сферической полости, а с размерностью напряжений – к модулю упругости E_0 нетронутого массива, при этом обозначения безразмерных величин оставим прежними.

Коэффициенты $e_0^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_m^{(1)}$ и $e_0^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{n-m}^{(2)}$ определим из условия того, что в нетронутом массиве $E(r) \equiv 1$, то есть $\lim_{r \rightarrow \infty} E(r) = E_0$ и из условия прохождения полинома (11) через заданный массив экспериментальных точек $(r_i, E_i), i = 1, \dots, n$, то есть из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$e_0^{(1)} = 1, E(r_i) = E_i, i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

В итоге, принимая за исходные данные экспериментальные точки, представленные на рис. 2 для случая б), получим

$$E(r) = \begin{cases} 1 - 0.327r + 0.251r^2 - 0.075r^3 + 0.011r^4 - 0.89 \cdot 10^{-3}r^5 + 35 \cdot 10^{-6}r^6 - 5 \cdot 10^{-7}r^7, & 1 \leq r \leq r^*, \\ 1 + \frac{132.8}{r} - \frac{9326.7}{r^2} + \frac{213215}{r^3} - \frac{1.57 \cdot 10^6}{r^4}, & r \geq r^*. \end{cases} \quad (13)$$

Функция (13) вместе с экспериментальными точками представлены на рисунке 3.

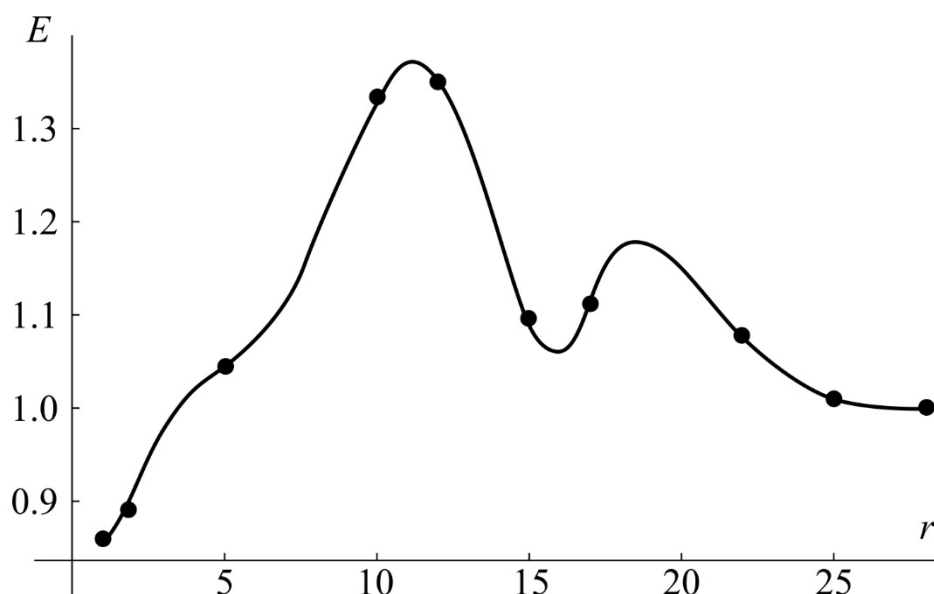


Рис. 3. – Аппроксимация нормированного модуля упругости составной функцией (13).

Решение уравнения (10) с учетом (13) в каждой из областей $1 \leq r \leq r^*$ и $r \geq r^*$ будем искать в виде обобщенных степенных рядов

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^{\lambda+k}. \quad (14)$$

Тогда перемещения для всей области определяются в форме

$$u(r) = \begin{cases} C_{11} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(1)} r^{\lambda_1+k} + C_{12} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(2)} r^{\lambda_2+k}, & 1 \leq r \leq r^*; \\ C_{21} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(1)} r^{\lambda_1-k} + C_{22} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(2)} r^{\lambda_2-k}, & r \geq r^*. \end{cases} \quad (15)$$

При $1 \leq r \leq r^*$ коэффициенты $u_{k1}^{(1)}, u_{k1}^{(2)}, k = 1, 2, \dots$ определяются по формулам:

$$u_k^{(j)} = - \frac{\sum_{i=1}^m e_i^{(1)} u_{k-i} [(\lambda_j + (k-i))(\lambda_j + (k+1)) - 2(1 - iv_1)]}{(\lambda_j + k - 1)(\lambda_j + k + 2)},$$
$$k = 1, 2, \dots, u_{-k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \lambda_{1,2} = -2, 1.$$

При $r \geq r^*$ коэффициенты $u_{k2}^{(1)}, u_{k2}^{(2)}, k = 1, 2, \dots$ определяются по формулам:

$$u_k^{(j)} = - \frac{\sum_{i=1}^{n-m} e_i^{(2)} u_{k-i} [(\lambda_j + (k-i))(\lambda_j + (k+1)) - 2(1 - iv_1)]}{(\lambda_j + k - 1)(\lambda_j + k + 2)},$$
$$k = 1, 2, \dots, u_{-k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \lambda_{1,2} = -2, 1.$$

Решение (15) содержит четыре неизвестных константы $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$, которые определим из граничных условий (9) и условия гладкости функции $u(r)$, определяемой соотношением (15), на границе $r = r^*$. Указанные условия в перемещениях представляют собой следующую систему четырех уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du(1)}{dr} + 2v_1 u(1) = -\frac{q_a}{v_0 E(1)}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{du}{dr} \right) = -\frac{gh}{v_0}, \\ \lim_{r \rightarrow r^*-0} u(r) = \lim_{r \rightarrow r^*+0} u(r), \\ \lim_{r \rightarrow r^*-0} \left(\frac{du}{dr} \right) = \lim_{r \rightarrow r^*+0} \left(\frac{du}{dr} \right). \end{array} \right. \quad (16)$$

Решение системы (16) имеет вид

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= (2\nu - 1)gh, & C_{11} &= \frac{-q_a}{\nu_0 E(1)S_2} + (2\nu - 1)gh \frac{S_6 S_9 - S_5 S_{10}}{S_4 S_9 - S_5 S_8}, \\
 C_{12} &= \frac{-\frac{q_a}{\nu_0 E(1)}(S_3 S_9 - S_5 S_7) + (2\nu - 1)gh S_1 (S_6 S_9 - S_5 S_{10})}{S_1 (S_4 S_9 - S_5 S_8) - S_2 (S_3 S_9 - S_5 S_7)}, & (17) \\
 C_{21} &= \frac{S_3}{S_5 S_2} \frac{-q_a (S_4 S_9 - S_5 S_8) + (1 - 2\nu)gh (S_6 S_9 - S_5 S_{10})}{S_1 (S_4 S_9 - S_5 S_8) - S_2 (S_3 S_9 - S_5 S_7)} + \\
 &+ \frac{S_4}{S_5} \frac{\frac{q_a}{\nu_0 E(1)}(S_3 S_9 - S_5 S_7) + (1 - 2\nu)gh S_1 (S_6 S_9 - S_5 S_{10})}{S_1 (S_4 S_9 - S_5 S_8) - S_2 (S_3 S_9 - S_5 S_7)} + \frac{S_6}{S_5} (1 - 2\nu)gh,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - 2 + 2\nu_1) u_{k1}^{(1)}; & S_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1 + 2\nu_1) u_{k1}^{(2)}; & S_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(1)} (r^*)^{k-2}; \\
 S_4 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(2)} (r^*)^{k+1}; & S_5 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(1)} (r^*)^{-k-2}; & S_6 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(2)} (r^*)^{-k+1}; \\
 S_7 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - 2) u_{k1}^{(1)} (r^*)^{k-2}; & S_8 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) u_{k1}^{(2)} (r^*)^{k+1}; & S_9 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-k - 2) u_{k2}^{(1)} (r^*)^{-k-2}; \\
 S_{10} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-k + 1) u_{k2}^{(2)} (r^*)^{-k+1}; & \nu_0 &= \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (15), (17) определяют поле перемещений горного массива вблизи сферической полости при аппроксимации неоднородного модуля сдвига обобщенным полиномом (13). По найденным перемещениям последовательно используя соотношения Коши (7) и закон Гука (8) определяются распределения полей деформаций и напряжений соответственно.

Численный эксперимент

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунках 4–6. Отметим, что при моделировании использовались безразмерные величины.

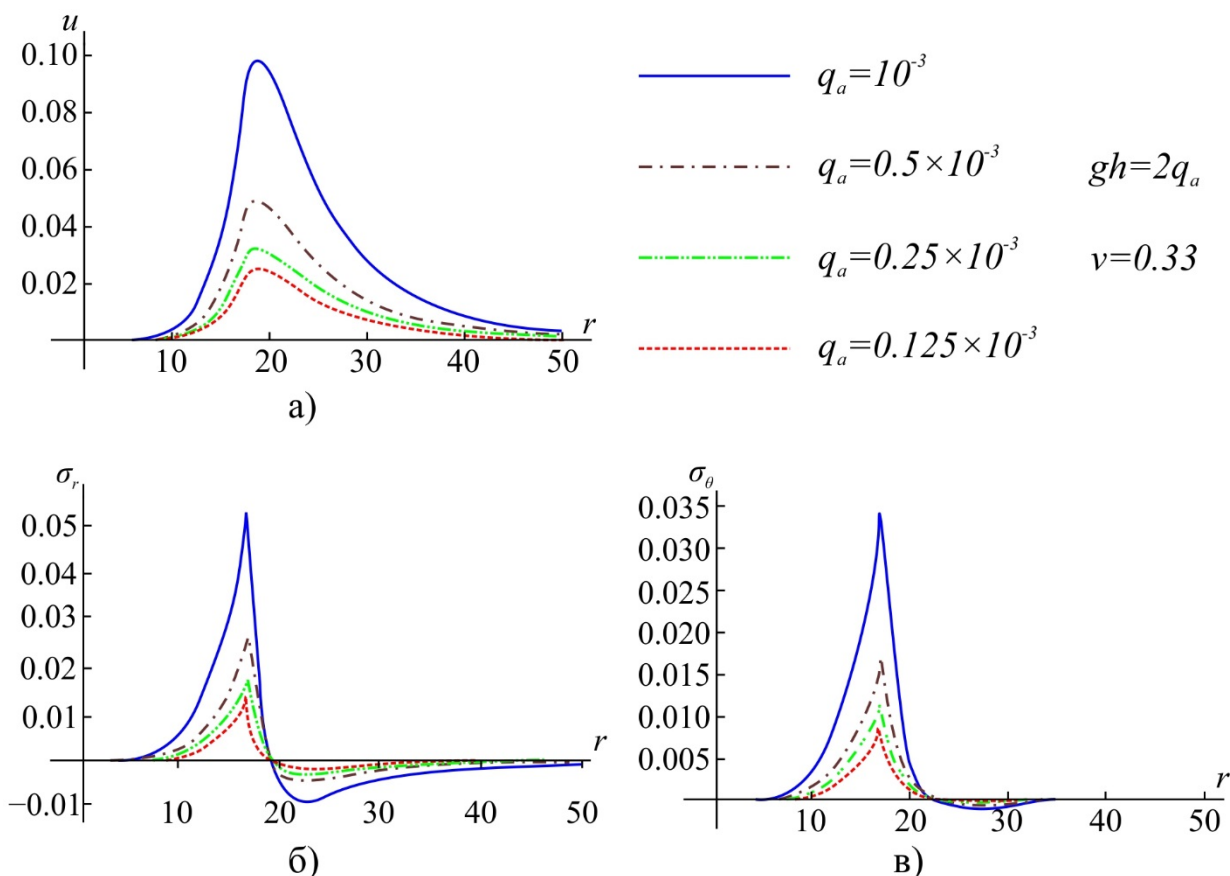


Рис. 4. – Зависимости (а) компоненты u вектора перемещения; (б) компоненты напряжения σ_r ; (в) компоненты напряжения σ_θ от координаты r при различных значениях безразмерного параметра интенсивности q_a и гидростатического давления gh и фиксированном коэффициенте Пуассона ν .

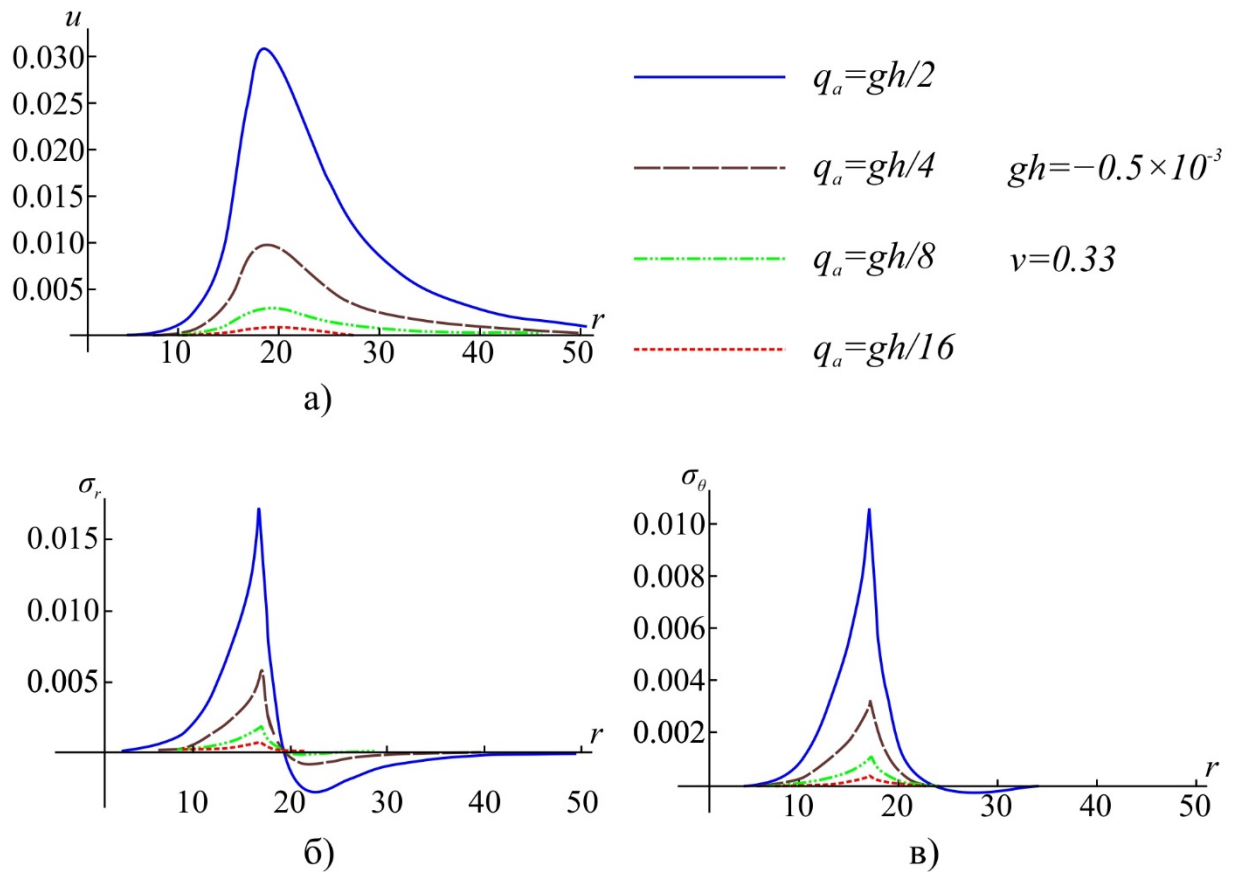


Рис. 5. – Зависимости (а) компоненты u вектора перемещения; (б) компоненты напряжения σ_r ; (в) компоненты напряжения σ_θ от координаты r при различных значениях безразмерного параметра интенсивности q_a и при фиксированных значениях гидростатического давления gh и коэффициента Пуассона ν .

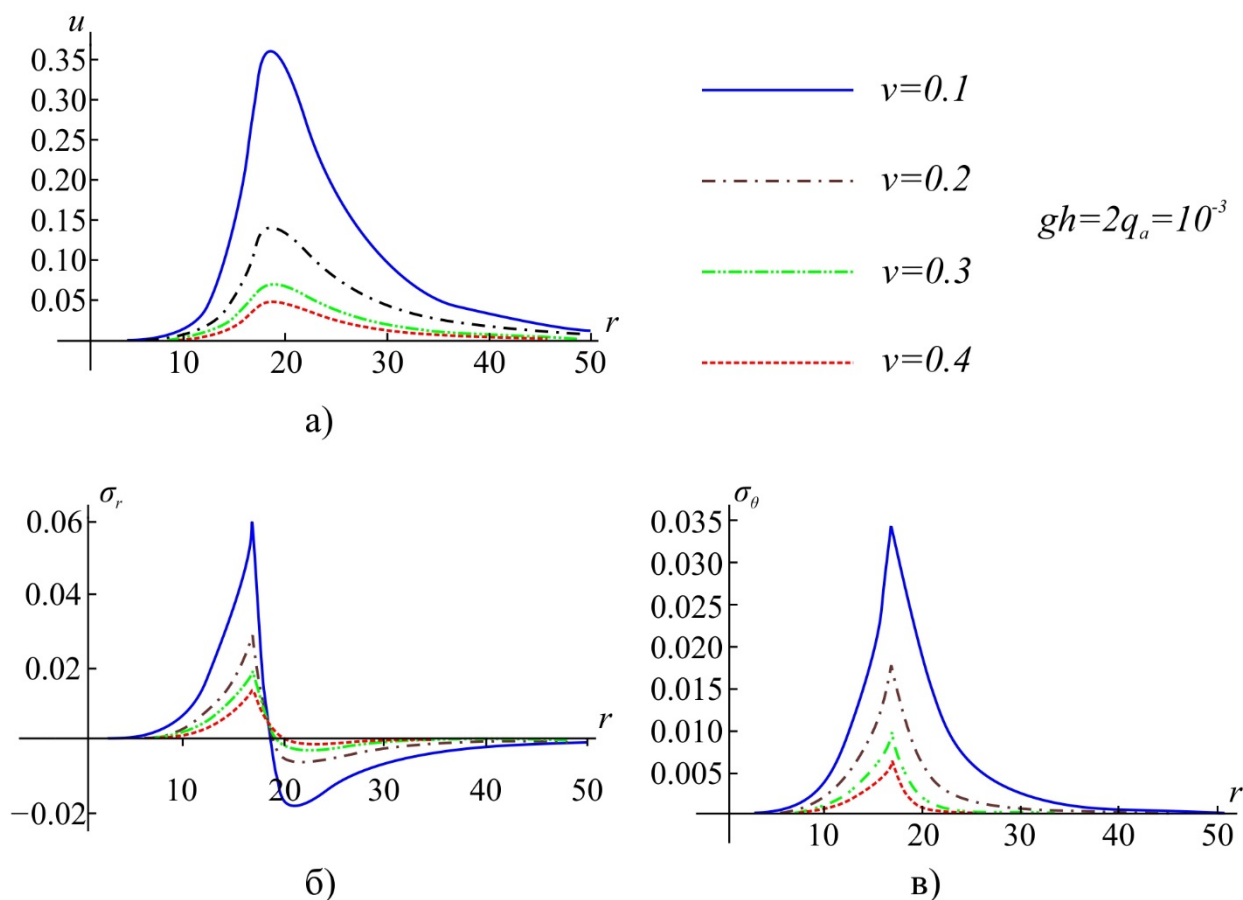


Рис. 6. – Зависимости (а) компоненты u вектора перемещения; (б) компоненты напряжения σ_r ; (в) компоненты напряжения σ_θ от координаты r при различных значениях коэффициента Пуассона и фиксированных значениях гидростатического давления gh и интенсивности q_a .

Выводы

Таким образом, в настоящей работе разработана математическая модель и найдены аналитические решения, описывающие напряженно-деформированное состояние массива горных пород вблизи сферической полости с учетом технологической неоднородности его механических свойств. Проведен численный эксперимент для конкретных функциональных зависимостей модуля упругости от радиальной координаты, построены

решения, описывающие соответствующие напряженно-деформированные состояния. Осуществлен анализ результатов численного эксперимента, на основе которого могут быть сделаны следующие выводы:

- наблюдается существенная немонотонность компонент напряженно-деформированного состояния, при этом как для радиальной компоненты вектора перемещений, так и для главных компонент тензора напряжений характерна точка локального максимума, которая зависит от вида функции, аппроксимирующей технологическую неоднородность упругих свойств приконтурной области горного массива (рис. 4 – 6);

- с пропорциональным уменьшением интенсивностей внутреннего и гидростатического давлений перемещение и абсолютные значения главных компонент напряжений уменьшаются (рис. 4); такой же эффект наблюдается при уменьшении интенсивности одной из нагрузок (внешней – gh или внутренней q_a), если интенсивность второй нагрузки фиксируется (рис. 5);

- рост коэффициента Пуассона ν приводит к незначительному уменьшению абсолютных величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние (рис. 6).

Литература

1. Баклашов И.В., Руппенейт К.В. Прочность незакрепленных горных выработок. М.: Недра, 1970. 139 с.

2. Tien Y.M., Kuo M.C. A failure criterion for transversely isotropic rocks // Int. J. Rock. Mech. Min. 2001. № 38. pp. 399–412.

3. Vervoort A., Min K., Konietzky H., Cho J.W., Debecker B., Dinh Q., Frühwirth T., Tavallali A. Failure of transversely isotropic rock under Brazilian test conditions // Int. J. Rock. Mech. Min. 2014. № 70. pp. 343–352.

4. Гоцев Д.В., Ененко И.А., Спорыхин А.Н. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в



упруговязкопластических массивах // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т.46. № 2. С. 141–150.

5. Страданченко С.Г., Плешко М.С., Армейсков В.Н. О необходимости проведения комплексного мониторинга подземных объектов на различных стадиях жизненного цикла // Инженерный вестник Дона, 2013, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1994.

6. Прокопов А.Ю., Прокопова М.В. Оценка необходимости реконструкции вертикальных стволов по фактору критических отклонений проводников от вертикали // Инженерный вестник Дона, 2013, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2106.

7. Бовт А.Н., Ловецкий Е.Е., Селяков В.И. Механическое действие камуфлетного взрыва. М.: Недра, 1990. 184 с.

8. Бовт А.Н., Михайлов А.А., Николаевский В.Н., Шурыгин Е.Л. Камуфлетный взрыв в малопористой твердой среде // Журнал прикладной механики и теоретической физики. 1986. № 1. С. 147–151.

9. Борисовец В.А. Неоднородности волнового характера в породах вблизи выработок, сооружаемых буровзрывным способом // Шахтное строительство. 1972. № 9. С. 7–11.

10. Койфман М.И. Классификация механических свойств твердых тел и вопросы классификации горных пород // В кн. Современные проблемы механики горных пород. Л.: Наука, 1972. С. 252–267.

11. Круглицкий Н. Н. Физико-математические основы регулирования свойств дисперсий глинистых минералов. Киев: Наукова думка, 1968. 320 с.

12. Бовт А.Н., Кобец В.И., Масленников А.М. и др. О напряженном состоянии цементированной среды при камуфлетном взрыве // Журнал прикладной механики и теоретической физики. 1980. № 3. С. 137–142.

13. Смирнов В.И. Сооружение подземных емкостей камуфлетными взрывами и выбор методов их закрепления // Шахтное строительство. 1973. № 12. С. 14–17.

14. Спивак А.А. Поведение среды при подземном взрыве // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1980. №4. С. 48–55.

15. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика горных пород. М.: Недра, 1975. 271 с.

16. Алимжанов А.М. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость пород приконтурной зоны подземной сферической полости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств пород // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2012. № 6. С. 32–45.
URL: ogbus.ru

References

1. Baklashov I.V., Ruppenejt K.V. Prochnost' nezakreplennyh gornyh vyrabotok [Strength of loose mine workings]. М.: Nedra, 1970. 139 p.

2. Tien Y.M., Kuo M.C. Int. J. Rock. Mech. Min. 2001. № 38. P. 399–412.

3. Vervoort A., Min K., Konietzky H., Cho J.W., Debecker B., Dinh Q., Frühwirt T., Tavallali A. Int. J. Rock. Mech. Min. 2014. № 70. pp. 343–352.

4. Gotsev D.V., Enenko I.A., Sporyhin A.N. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2005. 46(2). pp. 141–150.

5. Stradanchenko S.G., Pleshko M.S., Armejskov V.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1994.

6. Prokopov A.Ju., Prokopova M.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2106.

7. Bovt A.N., Loveckij E.E., Seljakov V.I. Mehanicheskoe dejstvie kamufletnogo vzryva [Mechanical action of camouflet explosion]. М.: Nedra, 1990. 184 p.



8. Bovt A.N., Mihajlov A.A., Nikolaevskij V.N, Shurygin E.L. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1986. № 1. pp. 147–151.
9. Borisovec V.A. Shahtnoe stroitel'stvo. 1972. № 9. pp. 7–11.
10. Kojfman M.I. Klassifikacija mehanicheskikh svojstv tverdyh tel i voprosy klassifikacii gornyh porod [Classification of mechanical properties of solids and classification of rocks]. V kn. Sovremennye problemy mehaniki gornyh porod [Modern problems of rock mechanics]. L.: Nauka, 1972. pp. 252–267.
11. Kruglickij N. N. Fiziko-matematicheskie osnovy regulirovanija svojstv dispersij glinistykh mineralov [Physical and mathematical bases of regulation of properties of dispersions of clay minerals]. Kiev: Naukova dumka, 1968. 320 p.
12. Bovt A.N., Kobec V.I., Maslennikov A.M. i dr. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1980. № 3. pp. 137–142.
13. Smirnov V.I. Shahtnoe stroitel'stvo. 1973. № 12. pp. 14–17.
14. Spivak A.A. Journal of Mining Sciences. 1980. №4. pp. 48–55.
15. Baklashov I.V., Kartoziya B.A. Mehanika gornyh porod [Rock mechanics]. M.: Nedra, 1975. 271 p.
16. Alimzhanov A.M. Jelektronnyj nauchnyj zhurnal «Neftegazovoe delo». 2012. № 6. pp. 32–45. URL: ogbus.ru