Применение вариационного принципа в задачах разработки и испытаний сложных технических систем

Р.З. Хайруллин

Московский государственный строительный университет

Главный научный метрологический центр Министерства обороны РФ

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация: Описана технология применения вариационного принципа в задачах разработки и испытаний сложных технических систем. Путем варьирования функционала, включающего энтропию Шеннона и типовые ограничения на функцию плотности распределения определяющего параметра сложной технической системы, построены функции плотности распределения. Показано, что в зависимости от вида ограничения построенная функция плотности распределения может иметь аналитический вид, выражаться через специальные математические функции или рассчитываться численно. Приведены примеры применения вариационного принципа для поиска функции плотности распределения. Представленная в статье технология применения вариационного принципа может быть использована в модели управления процессом самодиагностики интеллектуальных систем управления, обладающих машинным сознанием.

Ключевые слова: вариационный принцип, функция плотности распределения, энтропия Шеннона, сложная техническая система.

Введение

Многие законы физики могут быть выведены из утверждения (принципа), что для действительного варианта развития исследуемого процесса определенная характеристическая величина достигает экстремального значения по сравнению с ее значениями для некоторых других возможных вариантов развития этого процесса. В качестве примеров можно привести вариационные принципы механики (принцип Даламбера, принцип Гаусса, принцип Гамильтона), вариационные принципы геометрической оптики (принцип Ферма), принцип относительности и т.д. [1-3]. Принцип, как правило, является настолько общим, что из него могут быть выведены многие частные законы, которым подчиняется исследуемый процесс или система.

В настоящей работе используется принцип максимума неопределенности (принцип Джейнса), основанный на рассмотрении энтропии Шеннона [4,5]. Существенным отличием принципа максимума неопределенности является возможность получения оценок априорного распределения случайной величины [6,7] для таких информационных ситуаций, когда известны различные ограничения в виде вероятностной меры и отдельных моментных характеристик, задаваемых в форме равенств и неравенств. С математической точки зрения при использовании принципа максимума неопределенности учет таких ограничений приводит к необходимости решения классических и неклассических задач оптимизации.

Поскольку на начальных этапах разработки сложных технических систем (СТС) [8,9], а также при формировании облика проектируемой системы с метрологическим обеспечением [10,11] количество доступной и достоверной информации крайне мало, то принцип максимума энтропии является одним из немногих методов, позволяющих получать некоторые обоснованные выводы на ранних этапах разработки СТС.

Общая постановка задачи

Пусть имеется некоторая совокупность ограничений, накладываемых на случайные величины в виде заданных статистических моментов и/или в виде ограничения некоторыми оценками сверху и снизу области возможных значений этих случайных величин. Ставится задача: не зная ничего, кроме этих ограничений, задаться для дальнейших исследований (в конечном счете, для оценки эффективности разрабатываемой СТС) некоторым распределением вероятности его определяющего параметра.

Метод вариации функционала

Основные этапы метода состоят в следующем:

1. Задается функционал задачи и ограничения.
2. Составляется свертка функционала и линейной комбинации

ограничений с использованием неизвестных множителей Лагранжа.

3. Ищется экстремальное значение функционала путем его варьирования (первая вариация функционала приравнивается к нулю, в результате чего получается система алгебраических уравнений). При этом:

-если удается найти множители Лагранжа в аналитическом виде, то строится функция плотности распределения в аналитической форме;

-если не удается разрешить систему уравнений относительно множителей Лагранжа, то функция плотности распределения строится численно.

4. Полученное решение проверяется на выполнение достаточного условия экстремума.

Технология и результаты применения вариационного принципа

Пример 1. Пусть известно, что область возможных значений случайной величины X ограничена: $x \in (0,b)$, а первый момент x (математическое ожидание) равен $E[X] = S$. Найти распределение, обладающее максимальной энтропией.

Решение. В качестве меры неопределенности также выберем энтропию Шеннона: $H = -f(x)\ln f(x)$ и составим функционал:

$$L = \int_0^b [-f(x)\ln f(x) + \nu_0 f(x)]dx + \nu_1 \int_0^b f(x)dx.$$

Вычислим вариацию и приравняем ее к нулю:

$$\delta L = \delta\int_0^b [-f(x)\ln f(x) + \nu_1 x f(x) + \nu_0 f(x)]dx = \int_0^b [-\delta f(x)\ln f(x) - f(x)\delta\ln f(x) + \nu_1 x\delta f(x) + \nu_0 \delta f(x)]dx =$$

$$= \int_0^b \left[-\delta f(x)\ln f(x) - f(x)\frac{\delta f(x)}{f(x)} + \nu_1 x\delta f(x) + \nu_0 \delta f(x)\right]dx = 0 \cdot$$

Для определения множителей Лагранжа запишем два условия: $\int_0^b f(x)dx = 1$, $\int_0^b x \cdot f(x)dx = S$. Проинтегрировав левую часть первого равенства с учетом решения соответствующего уравнения Эйлера, выразим ν_0 через ν_1:

$$\nu_0 = 1 + \ln \nu_1 - \ln(e^{\kappa_1 b} - 1) \quad (1)$$

Проинтегрировав левую часть второго равенства методом интегрирования по частям с учетом решения уравнения Эйлера, получим:

$$be^{-1+\nu_1 b+\nu_0} - 1 = \nu_1 S. \quad (2)$$

Решая систему алгебраических уравнений (1),(2) совместно, получим :

$$\nu_1 = \frac{1}{b}\ln\frac{S}{S-b}, \quad \nu_0 = 1 + \ln\left(\frac{1}{b}\ln\frac{S}{S-b}\right) - \ln\left(\frac{S}{S-b} - 1\right) \quad ,$$

Запишем выражение для функции плотности распределения:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{b}\ln\frac{S}{S-b}}{\frac{S}{S-b} - 1} e^{x\frac{1}{b}\ln\frac{S}{S-b}}. \quad (3)$$

Отметим, что условие нормировки на единицу от соответствующего интеграла выполнено.

Таким образом, максимальной энтропией (максимальной неопределенностью, «минимальным» произволом» при заданном ограничении в интервале $(0;b)$ обладает распределение с плотностью (3).

Пример 2. Пусть известно, что область возможных значений случайной величины X ограничена $x \in (0,1)$, а ограничение имеет вид $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \beta$, где $\alpha < 1$. Найти распределение, обладающее максимальной энтропией.

Решение. Условие нормировки имеет вид: $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Будем максимизировать функционал:

$$L = \int_0^1 [-f(x)\ln f(x) + \nu_0 f(x)]dx + \nu_1 \int_0^{\alpha} f(x)dx.$$

Представим $f(x)$ в виде составной функции: $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \quad x \in (0,\alpha) \\ f_2(x) & , \quad x \in [\alpha,1) \end{cases}$.

Используя аддитивное свойство интеграла перепишем функционал задачи в виде:

$$L=\int_0^{\alpha}\left[-f_1(x)\ln f_1(x)+\nu_0 f_1(x)\right]dx+\nu_1\int_{\alpha}^{1}\left[-f_2(x)\ln f_2(x)+\nu_2 f_2(x)\right]dx.$$

Вычислим вариацию функционала и приравняем ее к нулю:

$$\delta L=\int_0^{\alpha}\delta f_1(x)\left[-\ln f_1(x)-1+\nu_0\right]dx+\int_{\alpha}^{1}\delta f_2(x)\left[-\ln f_2(x)-1+\nu_2\right]dx=0.$$

Поскольку $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - неизвестные функции, а $\delta f_1(x)$ и $\delta f_2(x)$ могут принимать произвольные значения), то равенство нулю возможно, если стоящее в квадратных скобках выражение равно нулю.

Для участка $0<x<\alpha$: $-\ln f_1(x)-1+\nu_0=0$, откуда: $f_1(x)=e^{--1+\nu_0}$ и $\nu_0=1+\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$. Тогда $f_1(x)=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Для участка $\alpha\le x\le 1$: $f_2(x)=e^{--1+\nu_2}$, $\nu_2=1+\ln\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$, $f_2(x)=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$. Тогда:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha} & ,\quad x\in(0,\alpha)\\[2mm] \dfrac{1-\beta}{1-\alpha} & ,\quad x\in[\alpha,1)\end{cases}. \qquad (4)$$

Отметим, что условие нормировки для функции $f(x)$ выполнено.

Таким образом, максимальной энтропией (максимальной неопределенностью, «минимальным» произволом» при заданном ограничении в интервале $0<x<1$ обладает кусочно-постоянная функция плотности распределения (4).

Пример 3. Пусть область возможных значений случайной величины X ограничена: $x\in(a,b)$, а математическое ожидание равно $E[X]=S$. Найти распределение, обладающее максимальной энтропией.

Решение. В качестве меры неопределенности также используем энтропию Шеннона. Величина ν_0, полученная в результате варьирования функционала, и решения соответствующей системы уравнений, имеет достаточно громоздкий вид, и в настоящей работе не приводится. Соответствующая алгебраическая система уравнений:

$$\begin{cases} v_0 = 1 + \ln v_1 - \ln(e^{v_1 b} - e^{v_1 a}) \\ be^{-1+v_1 b+v_0} - ae^{-1+v_1 a+v_0} = v_1 S \end{cases}$$

решалась численно, после чего также численно строилась функция плотности распределения $f(x)$.

Отметим, что условие нормировки на единицу от соответствующего интеграла от функции плотности распределения также выполнено.

Изложенный метод позволяет находить экстремальные распределения и для других ограничений. Некоторые результаты представлены в обобщенном виде в таблице.

Таблица. Результаты применения вариационного метода.

№	Область значений	Ограничения	Плотность распределения
1.	$x \in (0,1)$	нет	$f(x) = 1$ - равномерное распределение
2	$x \in (-\infty, \infty)$	$E[X] = m$, $E[X^2] = \sigma^2 + m^2$	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ - гауссовское распределение
3.	$x \in (0, \infty)$	$E[X] = \frac{1}{\lambda}$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ - экспоненциальное распределение
4.	$x \in (-\infty, \infty)$	$E[\|X\|] = S$	$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha \|x\|}$ - распределение Лапласа (двойное экспоненциальное распределение)
5.	$x \in (0, \infty)$	$E[X] = S_1$ $E[\lg X] = S_2$	$f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$ - содержит гамма-функцию
6.	$x \in (0,1)$	$E[\lg X] = S_1$ $E[\lg(1-X)] = S_2$	$f(x) = \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{B(m,n)}$ - содержит бета-функцию
7.	$x \in (0, \infty)$	$E[X^\alpha] = S$	$f(x) = \frac{\alpha}{(\alpha S)^{1/\alpha} \Gamma(1/\alpha)} e^{-\frac{x^\alpha}{\alpha S}}$ - содержит гамма-функцию

8.	$x \in (0,b)$	$E[X]=S$	$f(x)=\dfrac{\frac{1}{b}\ln\frac{S}{S-b}}{\frac{S}{S-b}-1}e^{x\frac{1}{b}\ln\frac{S}{S-b}}$
9.	$x \in (a,b)$	$E[X]=S$	$f(x)$ - непрерывная функция, рассчитывалась численно
10.	$x \in (0,1)$	$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\beta$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}, & x\in(0,\alpha)\\ \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}, & x\in[\alpha,1)\end{cases}$
11.	$x \in (0,1)$	$\int_0^{\alpha} xf(x)dx=S$	$f(x)$ - кусочно-непрерывная функция, рассчитывалась численно

В таблице в п.1-4 приведены аналитические выражения для функции $f(x)$, широко используемые в теории вероятностей и математической статистике; в п.5-7 - аналитические выражения для функции $f(x)$, задаваемые с помощью специальных математических функций (гамма и бета), используемых в основном при решении практических задач теории надежности; в п.8-11 – функции, типичные для задач разработки и испытаний СТС.

Заключение и выводы

Вариационный принцип позволяет получить как широко используемые в теории вероятности и математической статистике законы распределения, так и специфические распределения, характерные для задач разработки и испытаний СТС.

В зависимости от вида и характера учитываемых ограничений не всегда удается получить функцию плотности распределения в аналитической форме. Например, при учете ограничений на статистические моменты второго порядка и выше получаемая система алгебраических уравнений может быть решена, как правило, только численно, а выражения для множителей Лагранжа могут включать специальные математические функции. В этом случае функция плотности распределения $f(x)$ также строится численно.

Информационная ситуация, складывающаяся при проведении научных исследований, направленных на разработку СТС, отличается от информационной ситуации в статистической физике, механике и математической статистике прежде всего многообразием и формой задания исходной информации (ограничений). Поэтому вариационный принцип является эффективным инструментом получения новых знаний в задачах разработки и испытаний СТС, особенно на начальных этапах при крайне ограниченном объеме располагаемой информации.

Представленная в статье технология применения вариационного принципа может быть использована в модели управления процессом самодиагностики интеллектуальных систем управления, обладающих машинным сознанием [12].

Литература

1. Полак Л. С. Вариационные принципы механики. Москва: Физматлит, 1959. 932 с.
2. Гюйгенс Х. Трактат о свете. Москва: Наука,1935. 175 с.
3. Полак Л. С. Уильям Гамильтон. Москва: Наука,1993. 270 с.
4. Мартыщенко Л.А., Панов В.В. Методы военно-научных исследований в задачах разработки и испытания вооружения. Москва: Министерство обороны СССР. 1981. 280 с.
5. Хайруллин Р.З. Использование неравенств Чебышева в задачах проектирования сложных технических систем // Инженерный вестник Дона, 2024. № 10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2024/9584.

6. Yang H., Ke J., Ye J. A universal distribution law of network detour ratios // Transportation Research. Part C: EmergingTechnologies. 2018. Vol. 96. pp. 22-37.

7. Higgins V., Asgari S., Adeli, K. Choosing the best statistical method for reference interval estimation // Clinical Biochemistry. 2019. Vol. 71. pp. 14-16.

8. Мищенко В.И., Кравцов А.Н., Мамлеев Т.Ф. Полумарковская модель функционирования резервируемых средств измерений с учётом периодичности поверки // Измерительная техника. 2021. № 4. С.22-27.

9. Khayrullin R.Z. A Probabilistic Physico-Chemical Diffusion Model of the Key Drifting Parameter of Measuring Equipment // Axioms. 2024. 13(1). 41.

10. Боровой В.В., Наугольнов О.А., Мыслимов Д.А., Шахов Д.В., Киллер А.И., Ланкин И.М. Математические модели погрешности измерения основной кривой намагничивания листовой электротехнической стали // Инженерный вестник Дона, 2021, № 8 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2021/7173/.

11. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Пугачев И.В. Синтез систем фазовой автоподстройки частоты в условиях возмущений на основе модели объединенного принципа максимума и дискретного метода инвариантного погружения // Инженерный вестник Дона, 2020, №12 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2020/6710/.

12. Sukhobokov A., Belousov E., Gromozdov D., Zenger A., Popov I. A universal knowledge model and cognitive architectures for prototyping AGI // Cognitive Systems Research. 2024. V. 88. P. 101279.

References

1. Polak L. S. Variacionnye principy mekhaniki [Variational principles of mechanics]. 1959. Moskva. Fizmatlit. 932 p.

2. Huygens H. Traktat o svete [Treatise on light]. Moskva. Nauka. 1935. 175 p.

3. Polak L. S. Uil'yam Gamil'ton [William Hamilton]. 1993. Moskva. Nauka. 270 p.

4. Martyshchenko L.A., Panov V.V. Metody voyenno-nauchnykh issledovaniy v zadachakh razrabotki i ispytaniya vooruzheniya. Chast' 1 [Methods of military scientific research in the tasks of development and testing of weapons]. Moskva. 1981. 125p.

5. Khayrullin R. Z. Inzhenernyj vestnik Dona. 2024, № 10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2024/9584

6. Yang H., Ke J., Ye J. Transportation Research. Part C: Emerging Technologies. 2018. Vol. 96, pp. 22-37.

7. Higgins V., Asgari S., Adeli, K. Clinical Biochemistry. 2024. Vol. 71. pp. 14-16.

8. Mishchenko V.I., Kravtsov A.N., Mamleev T.F. Izmeritel'naya tekhnika. 2021. No 4. pp.22-27.

9. Khayrullin R.Z. Axioms. 2024. 13(1). 41.

10. Borovoy V.V., Naugol'nov O.A., Myslimov D.A., Shakhov D.V., Killer A.I., Lankin I.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021, № 8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2021/7173/.

11. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Pugachev I.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2020. № 12. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2020/6710/.

12. Sukhobokov A., Belousov E., Gromozdov D., Zenger A., Popov I. A universal knowledge model and cognitive architectures for prototyping AGI. Cognitive Systems Research. 2024. V. 88. P. 101279.

Дата поступления: 22.12.2024

Дата публикации: 29.01.2025