**Инженерный вестник Дона**, №1 (2015)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2800

# О краевой задаче теории упругости в полярной системе координат

*П.В. Дородов*

*Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Удмуртия*

**Аннотация:** В статье изложена постановка краевой задачи деформируемого твердого тела в полярной системе координат. Задача приведена к особому интегральному уравнению, решение которого позволяет определить местные напряжения на линии сопряжения возле их концентрации.

**Ключевые слова:** концентратор напряжений, упругое тело, местные напряжения, краевая задача, интегральное уравнение.

В современных машинах широко применяются осесимметрично нагруженные детали сложной формы, ослабленные различными концентраторами напряжений, в близи границ которых возникают значительные местные напряжения, поэтому возникает необходимость в отыскании решения краевой задачи в полярной системе координат [1, 2].

С точки зрения расчетной схемы любую деталь можно представить как упругое тело единичной толщины произвольной формы, подвергающееся воздействию внешних нагрузок $P_n$ и находящееся в состоянии равновесия (рис. 1 а).

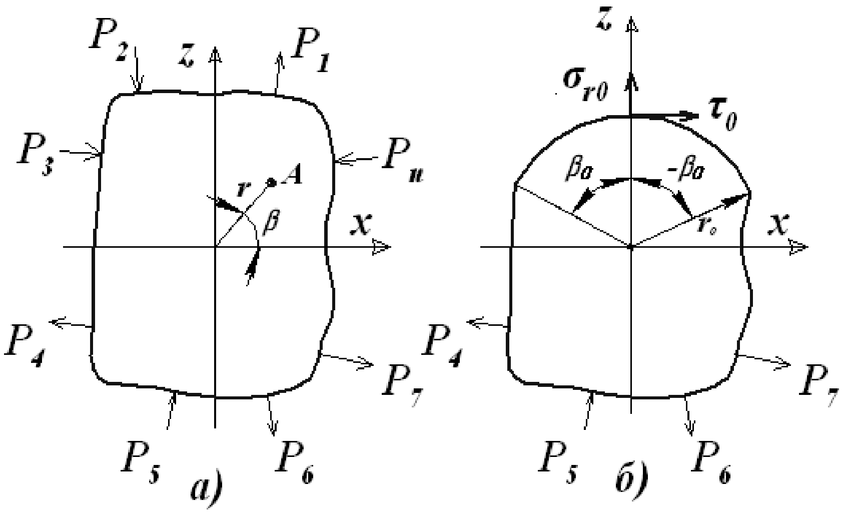


Рис. 1 – Плоское упругое тело:

а) расчетная схема; б) элемент тела с круговым сечением

Пусть координатами точки *A* будут полярный радиус *r*, отсчитываемый от центра тяжести, и угол *β*.

Для исследования напряженно-деформированного состояния воспользуемся уравнениями Ламе, описывающими равновесие бесконечно малого элемента сплошной среды в перемещениях без учета массовых сил, которые в полярной системе в условиях плоского деформированного состояния примут вид [3]:

$$\left.\begin{aligned}&\left(2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2(1-\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2(1-\nu)}{r^2}+\frac{(1-2\nu)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{k}{r^2}\right)w=0,\\&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{k}{r^2}\right)u+\left((1-2\nu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(1-2\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{(1-2\nu)}{r^2}+\frac{2(1-\nu)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)w=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\nu$ – коэффициент Пуассона; *u* и *w* – перемещения точек в полярной системе координа *β, r*; $k=3-4\nu$.

Введем новую переменную $t=\ln\frac{r}{\rho}$ $\left(r=\rho e^t\right)$, *ρ=const*, тогда систему (1) можно привести к уравнениям с постоянными коэффициентами [1, 3]

$$\left.\begin{aligned}&\left(2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)+(1-2\nu)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\right)w=0,\\&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+k\right)u+\left((1-2\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)w=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решение системы (2) ищем в виде интегрального преобразования Фурье [4]

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\alpha,t)\cdot e^{-i\alpha\beta}\,d\alpha,\\w&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W(\alpha,t)\cdot e^{-i\alpha\beta}\,d\alpha,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $\alpha$ – произвольное вещественное число.

После подстановки (3) в (2) имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&2(1-\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\left(2(1-\nu)+(1-2\nu)\alpha^2\right)U-i\alpha\frac{\partial W}{\partial t}-kW=0,\\&(1-2\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\left((1-2\nu)+2(1-\nu)\alpha^2\right)W-i\alpha\frac{\partial U}{\partial t}+kU=0,\end{aligned}\right\}$$

решение которой может быть представлено в виде [1]:

$$\left.\begin{aligned}&U=A_1\exp\left(-i\frac{\sqrt{a_1a_2}}{a_3}t\right)+A_2\exp\left(i\frac{\sqrt{a_1a_2}}{a_3}t\right)+B_1\exp\left(-\frac{\sqrt{a_1a_2}}{a_3}t\right)+B_2\exp\left(\frac{\sqrt{a_1a_2}}{a_3}t\right),\\&W=\left[A_1\left(\alpha\sqrt{a_1a_2}\,i-16a_4\right)\exp\left(-i\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}t\right)-A_2\left(\alpha\sqrt{a_1a_2}\,i-16a_4\right)\exp\left(i\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}t\right)+\right.\\&\left.B_1\left(\alpha\sqrt{a_1a_2}-16a_4\right)\exp\left(-i\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}t\right)+B_2\left(\alpha\sqrt{a_1a_2}-16a_4\right)\exp\left(i\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}t\right)\right]\Big/a_5,\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

где $A_n$, $B_n$ $(n=1,\ 2)$ – постоянные, подлежащие определению из краевых условий; $a_1=2\left(1-3\nu+2\nu^2\right)$;

$$a_2=6\nu-4\alpha^2\nu^2-4\nu^2+6\alpha^2\nu-2-2\alpha^2+\left(-18-4\alpha^2\nu^2-180\nu^2+192\nu^3+\right.$$
$$\left.6\alpha^2\nu+48\nu-34\alpha^2-64\nu^4\right)^{0,5};$$

$$a_3=2(1-\nu)(1-2\nu);\quad a_4=(1-\nu)\left(\frac{3}{4}-\nu\right)\left(\nu-\frac{1}{2}\right);$$

$$a_5=8\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(1-\nu)\left[\left(\alpha^4+\alpha^2+16\left(\nu-\frac{3}{4}\right)^2\right)\nu-\alpha^4-\frac{\alpha^2}{2}-8\left(\nu-\frac{3}{4}\right)^2\right].$$

Уравнения (4) можно привести к эквивалентным смешанным гиперболическим и тригонометрическим функциям [3].

Подставляя (4) в (3) определяем перемещения $u$ и $w$. По формулам Коши находим деформации

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{e^{-t}}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t},\quad \varepsilon_\beta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\beta}=\frac{e^{-t}}{\rho}\left(u+\frac{\partial w}{\partial\beta}\right),$$

$$\gamma_{r\beta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}=\frac{e^{-t}}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial w}{\partial t}-w\right),$$

а по закону Гука – напряжения:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\beta\right],\\ \sigma_\beta &= \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_\beta+\nu\varepsilon_r\right],\\ \tau_{r\beta} &= G\gamma_{r\beta}.\end{aligned}\right\}$$

Задаемся следующими краевыми условиями:

1) Из условий симметрии, без жесткого перемещения тела и при отсутствии полости в начале координат $u(0;0)=w(0;0)=0$;

2) $\sigma_r(t_0;\beta)=\sigma_{r0}$, $|\beta|\le\beta_0$;

3) $\tau(t_0;\beta)=\tau_0$, $|\beta|\le\beta_0$,

где $t_0$-му соответствует радиус сектора $r_0$, с углом полураствора $\beta_0$ (рис. 1 б).

Если $\sigma_{r0}$ и $\tau_0$ рассматривать в качестве местных напряжений, то они в основном должны зависеть от перемещений на дуге сектора $|\beta|\le\beta_0$ и мало зависеть от $r_0$, поэтому необходимо устремить его к бесконечности. Здесь координаты $\beta_0$ и $r_0$ определяют границы концентратора напряжений. Решить задачу удается только численными методами, однако при $\beta_0 << \frac{\pi}{2}$ приходим к выражению [1, 4-7]:

$$a\varphi(s)+\frac{b}{\pi i}\int_{-l}^{+l}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-s}d\xi=f(s), \qquad (5)$$

где $a$, $b$ – постоянные, зависящие от упругих свойств материала; $s$ – дуговая абсцисса линии интегрирования (сопряжения), соответствующая углу $\beta_0$; $l$ – полуширина линии сопряжения; $f(s)=u_1'(s)-iw_1'(s)$; $\varphi(s)=\sigma_{1r}(s)+i\tau_1(s)$. Индекс 1 означает местный характер напряженно-деформированного состояния.

Частные решения интегрального уравнения (5) представлены в [4-10].

Итак, интегральное уравнение (5) может быть использовано для решения краевых задач в полярных координатах при определении местных напряжений на какой-либо дуге интегрирования, в качестве которой может служить как внешний контур тела, так и какая-либо дуговая линия сопряжения возле концентратора напряжений внутри плоского тела.

## Литература

1. Дородов П.В. Комплексный метод расчета и оптимального проектирования деталей машин с концентраторами напряжений: монография. – Ижевск: ФГБОУ ВПО Ижевская ГСХА, 2014. 316 с.
2. Ерохин М.Н., Дородов П.В. Метод оптимального проектирования деталей в зоне контакта // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет им. В.П. Горячкина». 2014. № 3. С. 5-8.
3. Mixed boundary value problems of potential theory and their applications in engineering / by V.I. Fabrikant. Boston : Kluwer Academic Publishers, c1991. 451 p.
4. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Изд-во «Наука», 1968. 512 с.
6. Trjitzinsky W.J. Singular integral equations with Cauchy kernels // Trans. Amer. Math. Soc.– 1946. –V.60.– №2.– pp.167-214.
7. Дородов П.В. Приведение краевой задачи для плоского упругого тела к одному особому интегральному уравнению // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета, 2012, № 80. С. 1–10 URL: ej.kubagro.ru/2012/06/pdf/14.pdf.
8. Дородов П.В. Исследование напряжений на линии сопряжения ступенчатой пластины // Инженерный вестник Дона, 2013,№2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1636.

9. Дородов П.В., Кулагин А.В. Исследование напряжений в окрестности плоского горизонтального выреза // Инженерный вестник Дона, 2012, № 2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/813.

10. Ерохин М.Н., Дородов П.В. Уточненный расчет и определение коэффициента концентрации напряжений в деталях машин, ослабленных боковыми вырезами // Международный технико-экономический журнал. 2014. № 4. С. 77-83.

**References**

1. Dorodov P.V. Kompleksnyy metod rascheta i optimal'nogo proektirovaniya detaley mashin s kontsentratorami napryazheniy: monografiya [Complex method of analysis and optimal projecting of machine components with stress concentrators: monograph]. P.V. Dorodov. Izhevsk: IzhGSHA, 2014. 316 p.

2. Erokhin M.N., Dorodov P.V. Vestnik MGAU V.P. Goryachkina», 2014. № 3. pp. 5-8.

3. Mixed boundary value problems of potential theory and their applications in engineering / by V.I. Fabrikant. Boston: Kluwer Academic Publishers, c1991. 451 p.

4. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. Vvedenie v mekhaniku kontaktnykh vzaimodeystviy [Introduction to contact mechanics]. Rostov-na-Donu: Izd-vo OOO «TsVVR», 2007. 114 p.

5. Muskhelishvili N.I. Singulyarnye integral'nye uravneniya [Singular integral equations]. M.: Izd-vo «Nauka», 1968. 512 p.

6. Trjitzinsky W.J. Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V.60. №2. pp.167-214.

7. Dorodov P.V. Politematicheskiy setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta, 2012, № 80. pp. 1–10. URL: ej.kubagro.ru/2012/06/pdf/14.pdf.

8. Dorodov P.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1636.

9. Dorodov P.V., Kulagin A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/813.

10. Erokhin M.N., Dorodov P.V. Mezhdunarodnyy tekhniko-ekonomicheskiy zhurnal, 2014. № 4. pp. 77-83.