О путнике Николая Орема и дзета-функции

Н.А. Балонин, М.Б. Сергеев

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: В работе показывается влияние изучения движения равномерно устающего путника Николая Орема на вывод о расхождении суммы гармонического ряда, дающего оценку пройденного путником пути. В такой интерпретации движения доказывалось, что путник может пройти сколь угодно большое расстояние. Рассматривается связь модели движения путника с дзета-функцией и сходными парадоксальными моделями, в которых путь оказывается конечен, несмотря на замедление или ускорение движения.
Ключевые слова: путник Орема, дзета-функция, нули функции, проблема Римана.

Введение

Математическая модель путника Орема возникла в XIV веке и остается универсальной основой для изучения сложных моделей динамических систем. Теория динамических систем является основой для описания многих технических, общественных, природных и других процессов и явлений [1, 2]. Как свойственно по-настоящему глубоким и плодотворным темам, она не исчерпывается одним каким-либо исследованием, она многогранна и с появлением новых технологий компьютерного мониторинга вычислений развивается дальше первых попыток Тьюринга вычислить нули дзета-функции.

Цель настоящей статьи – показать влияние работ Н. Орема на становление науки о динамике, дать представление широкому кругу читателей и программистов об этой модели.

Епископ и ученый

Николай Орем (Nicole Oresme) родился до 1330 г. Точная дата рождения неясна. Он известен, как магистр факультета искусств Парижского университета, о чем впервые упоминается в документах 1348 г.

Н. Орем был воспитателем будущего короля Франции Карла V, архидиаконом, каноником в Руане. Долгое время до своей смерти в 1382 г. он проживал в Лизье, где в 1377 г. был избран епископом. На рис. 1 приведен портрет Н. Орема, взятый из его книги в переводе В. П. Зубова [3].

Н. Орем известен своими переводами сочинений Аристотеля на французский язык, изобретением графического представления зависимости переменных величин от координат или времени (графики), выводами о равноускоренном движении и многим другим [4].

Рис. 1. – Портрет Н. Орема [3]

Глубокое влияние на ход становления науки о динамике в работах Галилея, Ньютона, Декарта и других ученых оказал «путник Орема» – математическая модель путешественника. Однако она до сих пор мало известна широкому кругу читателей.

Возникновение учения о путнике

Предшественник Н. Орема, логик Буридан, занимался проблемой разума находить верные решения, поскольку еще античные греки доказали, что он способен ошибаться. Буридан включил в процесс принятия решения моральную составляющую: «…правильно то, что приносит большее добро». Лейбниц, издеваясь над «буридановым ослом», пришел к выводу, что он умрет от голода, решая, какая же именно охапка сена принесет ему это самое большее добро.

Написанные Н. Оремом книги уцелели до наших дней, как и первые графики, которые он рисовал. Именно он считается изобретателем «костыля разума» – математического графика. На его графики ссылался Декарт. На рис. 2 приведены страницы из книги Н. Орема с графиками (изображение взято из источника [5]).

В это же время возникает парадоксальное учение о динамике. И Николай Орем изобрел то, что впоследствии превратилось в дзета-функцию.

Рис. 2. – Графики в книге Н. Орема [5]

Со «змеем» бесконечности, представленным значком ∞, человечество воюет очень давно [6]. Допустим, некий странник, отправившийся в путь, утомился, и на следующий день прошел только половину пути. После этого он, еще больше утомившись, прошел только 1/3 пути. Поскольку силы странника тают, и расстояния, которые он проходит, уменьшаются пропорционально количеству дней, рано или поздно он остановится. Н. Орем утверждает: нет. Нет такой дистанции, которую не одолел бы теряющий силы странник хоть и за очень большое количество дней. Если странник вышел из дома, то он достигнет хоть «центра Вселенной». Таким образом, Н. Орем вслед героям «Божественной комедии» Данте Алигьери, создал первую мировоззренческую математическую модель. Ведь выходит, что центра Вселенной можно достичь, двигаясь весьма умеренно. А прибавляя темп, как пишет С. Рамануджан [7], путник Орема появится с противоположной стороны пространства! И остановится он в дюжине сантиметров от точки выхода.

В данной статье, построенной на результатах компьютерных исследований в математической сети с исполняемыми онлайн - алгоритмами, реализованными по технологии «Живая книга» [8, 9], важна именно вторая интерпретация.

Связь с гипотезой Римана

Гипотеза Римана об особенностях расположения нетривиальных нулей дзета-функции признана одной из самых интересных математических задач последних двух столетий [10, 11]. Дзета-функция – это выход динамической системы, представителем которой, например, является маятник, совершающий колебания, слабо затухающие до состояния равновесия. Можно не дожидаться окончания колебательного процесса, воспользовавшись преобразованием координат, ведущим к быстро затухающей эта-функции. Поскольку состояния равновесия обоих процессов связаны формулой – по эта-функции находят дзета-функцию.

Движения «маятника» в обоих случаях постепенно стягиваются над комплексной плоскостью перед успокоением. Семейство «маятников» зависит от параметров, которые тоже размещают на комплексной плоскости. Параметры называются *нулями*, если равновесное состояние оказывается над нулем. Риман выбрал модель с нулями на линии с координатой 0,5 поперек вещественной оси. Расстояние между нулями меняется, они идут все чаще, колеблясь, как бы, «заметая» все возможные дистанции.

Риман не придал существенного значения тому, что нули находятся на линии и не сходят с нее. Он раздразнил математиков тем, что при всей простоте описываемой картины, это удивительное обстоятельство не доказано. Математик М. Атья [12] нашел по этому поводу ход рассуждения, но записал его очень невнятно: «…при комплексных аргументах, близких к вещественному значению, порождающему сумму положительных величин, значения дзета-функции сосредотачиваются около 1/12».

Большое количество публикаций и недавнее компьютерное исследование описываемой проблемы академиком Ю. Матиясевичем [13] подтверждают повышенное внимание к ней.

Развитие моделей путников

Наряду с моделью перемещения путника Орема, в XIV веке появились и другие модели движения. Они описывали, например, перемещения предметов в каюте движущегося корабля, но при этом считалось, что он стоял на месте. Н. Орем при построении графиков перемещения предметов точками, использовал новый для тех времен метод абстракции. Именно он предложил откладывать по вертикальной оси не только путь, но и скорость. Орем доказал, что равномерно устающий путник проходит тот же путь, что и при движении со средней скоростью. Для описания процесса равномерного уставания, когда устающий путник проходит все более короткие отрезки пути им использовался гармонический ряд $1/n$. На графике скоростей средняя скорость соответствует средней точке между отметками начальной скоростью и конечной.

Вывод, сформулированный Н. Оремом: «…путник, скорость которого падает до любой сколь угодно малой величины, пройдет любой по протяженности путь, поскольку всегда можно вычислить время равномерного движения со средней скоростью». Для дзета-функции эти параметры движения соответствуют ее единственному полюсу. Это заключение, касающееся физического представления пути, оперирует и физическими понятиями. Но странность заключалась в том, что если путник устает быстрее и для описания его передвижения, например, используется не $1/n$, а $1/n^2$, то путь оказывается конечен.

Леонард Эйлер установил, что расстояние, проходимое, движущимся медленнее путником Орема, пропорционально квадрату числа π [10]. Задачу с путником, движущимся быстрее и проходящим отрезки пути n, в начале прошлого века индийский ученый С. Рамануджан описывал британскому профессору Г. Харди как анекдотическую. В этом случае путник как будто бы проходил точку бесконечности и появлялся с противоположной стороны, не доходя до начала своего пути величины 1/12. Профессор Г. Хади был потрясен, поскольку С. Рамануджан вычислил значение очень абстрактной функции, созданной талантами математиков Орема, Эйлера и Римана.

Для описания движения путников со скоростью быстрее путника Орема, решение нашел Риман. Он предложил разрешить им менять направление движения. Но бесконечное перемещение путника нельзя представить петляющей линией, ведь она же бесконечна. Однако изменение направления может быть однообразным, по примеру сколь угодно долго успокаивающимся колебаниям идеального маятника.

В теории динамических систем существует понятие реакции апериодической или колебательной системы. Взгляд рыночного продавца на стрелку пружинных весов позволяет судить о точке успокоения так же, как и отделение статического коэффициента усиления от гармонических составляющих. Эйлер, меняя вещественные показатели степени усталости, но не меняя направления, не мог прийти к наблюдениям, к которым пришел Риман, использовавший в $1/n^s$ комплексный показатель степени s. Соответственно путь, не меняя протяженности, описываемой модулем комплексного числа, получает смену направления. Иными словами, путник вполне может повернуть назад и оказаться рядом с началом своего пути при соответствующем значении s. На рис. 3 приведена траектория перемещения путника Орема со сменой направлений по Риману. На нем видно, что бесконечность пути не мешает определению дистанции, пройденной путником.

Похожие на спирали Эйлера отрезки пути возникают из-за дискретности модели перемещения путника Орема. Если параметр $s = –1$, то модель понятна упомянутому ранее торговцу на рынке. Парадокс, высказанный Рамануджаном, объясняется тем, что при вариации значения параметра s путник Орема прибудет в точку, близкую к –1/12 (назад) приблизительно так же, как показано на рис. 3.

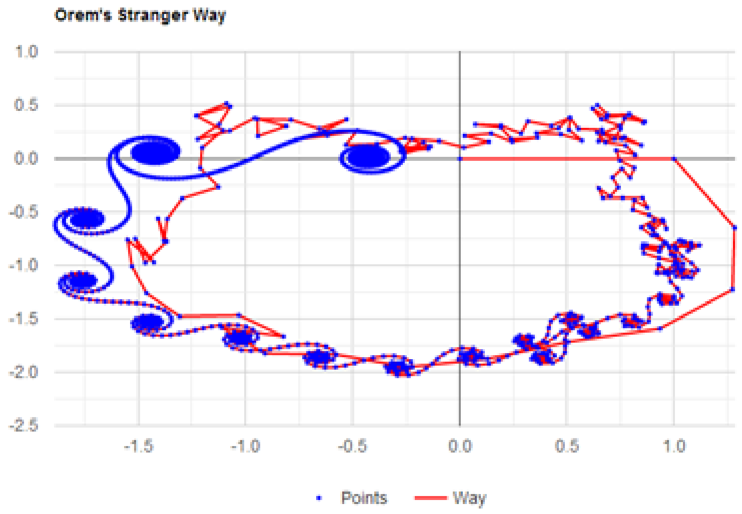

Рис. 3. Графическое представление траектории перемещения путника Орема по формуле Римана

Но в начале прошлого века считалось, что утверждение о равенстве суммы положительных натуральных чисел отрицательной дробной величине есть повод для помещения утверждающего в психлечебницу, о чем и писал не без юмора С. Рамануджан профессору Г. Харди. Теория динамических систем оперирует понятием неустойчивость, которое задается экспонентой. Блуждания путника могут быть расходящимися. Парадоксы условно суммируемых рядов строятся на запрете «передергивать и переставлять точки движения». Риман установил, что перестановки негативно сказываются на однозначности результатов суммирования. По логике Римана путник Орема в каждой точке остановки, соответствующей значению частичной суммы ряда, делает поворот на угол, соответствующий фазе $1/n^s$, и затем проходит дистанцию, описываемую модулем. Таким образом, если путник без поворотов проходит расстояние, пропорциональное квадрату числа π, то он его и проходит, но с учетом поворотов это будет длина криволинейного пути. Расстояние же до конечной точки, в которую он пришел, будет иным – измерения производятся в метрике, не связанной с путем.

Связь с задачей Чаплыгина

Шар, скатываясь с горы, обнаруживает свойство избирательности. Из возможных траекторий движения вниз им избирается наиболее короткая. В математический формализм это явление облек Лагранж: при движении оптимизируется интеграл от разности кинетической K и потенциальной P энергий L = K – P. Сумма этих двух составляющих, представляющая полную энергию системы, известна как функция Гамильтона или гамильтониан H = K + P. Следуя принципу сохранения полной энергии, система движется по линиям уровня функции H. В то же время, каждая такая линия уравновешена относительно седловой точки функции Лагранжа L: разность квадратичных функций, выражающих два вида энергии, преобразует чашу гамильтониана в поверхность типа седло. Траектория, как бы, сидит в седле, не «свешиваясь» с него на сторону.

Хотя игра с парой тесно связанных между собой функцией выглядит тавтологией, и формализм Лагранжа в практической своей части, касающейся нахождения трека, построен на эксплуатации более ясных и простых в использовании уравнений Гамильтона, поражает тот факт, что Лагранж сумел выразить формально, а что же именно оказывается экстремальным. На чем шар экономит, скатываясь с горы.

При ограничениях на скорость движения вбок (нога путника, колесо автомобиля, лезвие конька), возникают так называемые неголономные системы, к которым принадлежит, в частности, путник Орема. И тут полезно знать, что уравнения его модели перекликаются с дифференциальными уравнениями конька Чаплыгина. Вслед формализмам Лагранжа и Гамильтона возник формализм Аппеля. Он заключается в том, чтобы считать скорость v значением некой координаты. Тогда роль скорости играет ускорение a, и можно ввести псевдокинетическую энергию $S = ma^2/2$ (энергию ускорений).

Возникает аналог уравнений Лагранжа, который называется уравнением Аппеля. Сдвигом всего вверх используем не координату, а скорость, считая ее псевдокоординатой. Зачем это нужно? Ограничения иногда проще выразить через псевдокоординаты, а уж определить, зная скорость, настоящие координаты потом не составит труда. Первое издание учебника механики Аппеля содержало ошибку, ведь избавиться от неголономности непросто. На нее указал С. Чаплыгин. Учебник пришлось переписать, и с тех пор популярные в механике уравнения неголономных систем, модели автомобилей в частности, называются коньками или санями Чаплыгина. В наиболее простой своей конфигурации скорость движения тела, под которым катится конек, раскладывается на составляющие, зависящие от синуса и косинуса угла (например, угла поворота руля у автомобиля).

Параметрическая модель ряда дзета-функции $\zeta\ (a + jb) = x + jy$ в виде частичной суммы изменения координат приращениями имеет вид $x + \Delta_x$, $y = y - \Delta_y$, где a и b – параметры, от которых зависит функция, выражающая путь путника. Входы $\Delta_x = \cos(\omega t)\ u$ – прибавка по горизонту, $\Delta_y = \sin(\omega t)u$ – прибавка по вертикали (мнимая часть), текущая частота $\omega = b\ln(t)/t$. Это модель похожа на модель саней (коньков) Чаплыгина, на входе которых действует постепенно нисходящая (при $a > 1/2$) тяга $u = 1/t^a$, где t – тик дискретного времени. Руль свернут на сторону, так что сани движутся добавками к координатам пройденного пути, вычисляемыми, как для моделей автомобилей, через обычную тригонометрическую раскладку.

Именно поэтому возникают характерные для профиля пути клотоиды, парные завитки, напоминающие мотки нитки вслед катящемуся клубку.

Расстояние между нулями

При $a = 1/2$ возникает линейка «частот», зависящих от значения b, при которых путник, за которым теперь просматривается и автомобиль, помотавшись, возвращается в пункт своего старта 0. Дистанция между нулями постепенно сходит на нет по закону Грама 2π/log(*b*/2π), поэтому ее нормируют делением на эту функцию. Примитивность уравнений динамики путника Орема приводит к тому, что путь его складывается из кружков. Интенсивность встречи той или иной нормализованной дистанции между нулями описывается колоколообразной функцией (см. рис. 4). Средняя нормализованная дистанция равна единице, она же наиболее часто встречаемая. Результаты нашего вычислительного эксперимента приведены на рис. 4 зелеными точками.

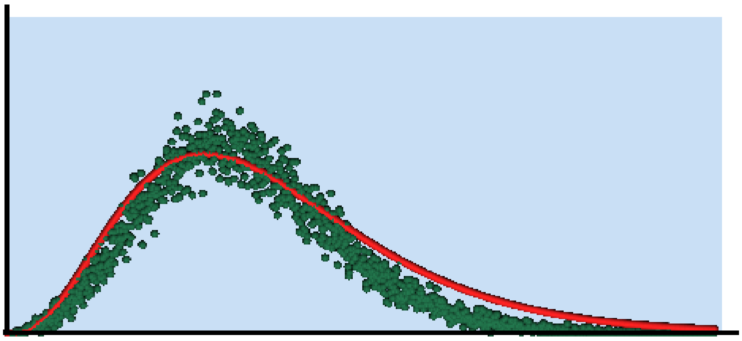

Рис. 4. Графическое представление интенсивности встреч дистанций

Красными точками изображена кубическая парабола, гасимая экспонентой. Из особенностей функции свечения нагретых тел родилась, под влиянием Планка и Эйнштейна, вся современная квантовая физика. Именно благодаря этой зависимости у М. Атьи возникло предположение, что гипотеза Римана так или иначе, но связана с физическими константами, в частности, с параметром 1/*ж*. Он использовал символ русского алфавита для величины 137, которой в физике характеризуют экспериментально определяемое расслоение линий спектра атома водорода.

Следуя этой логике, он вводит в рассмотрение преобразование Тодда *ж* = T(π) – функцию пересчета геометрической константы π в физическую величину. В верхнюю границу для значений функции T на периферии, определенную, в общем, над всей комплексной плоскостью. Оно названо так в честь учителя Атьи и используется в тексте доказательства гипотезы Римана.

Число π было получено в глубокой древности экспериментально, этот параметр качения колеса закономерно звучит в теме путника Орема, наворачивающего в пути окружности. Теперь нужно так преобразовать комплексную плоскость, чтобы точка π стала точкой *ж*. Если объединять между собой микромир и макромир, то надо это как-то делать с помощью общих констант. До М. Атьи это положение высказывал талантливый авиаконструктор Р. Бартини, которого поддержал физик Б. Понтекорво.

Такие отсылки и переклички между мирами математической физики и геометрии древних греков, по сути, один из наиболее мощных посылов к утверждению единства подходов к изучению Вселенной.

Заключение

В практике научных исследований студентов на кафедре вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения для визуализации путника Орема была выбрана трехмерная браузерная графика Three.js. Созданная студентами 3D-модель путника Орема из ее примитивов хранится, как и многие другие модели, на сервере [14]. Например, модель с *парой* близких путников. На сервере [14] можно ознакомиться с 3D демонстрационных версий.

Весь материал разработан на основе технологии «Живая книга» [8, 9] и является основой не только для построения анимаций при исследовании дзета-функции, но и для задач поиска ортогональных матриц Адамара [15] и анализа их структурных инвариантов [16], биологического компьютинга [17], моделей электромеханических стендов и многих других объектов.

Литература

1. Пономарев А.И., Игнатьев А.А. Применение показателя колебательности динамической системы станка для идентификации

катастрофического износа резца // Инженерный вестник Дона. 2022. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2022/7598.

2. Мощенко И.Н. Имитационное моделирование этнополитической ситуации юга России на основе теории динамических систем // Инженерный вестник Дона. 2010. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/216.

3. Орем Н. О конфигурации качеств / Перевод В. П. Зубова. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 134 с.

4. Гайденко В. П., Смирнов Г. А. Западноевропейская наука в средние века: Общие принципы и учение о движении. М.: Наука, 1989. 352 с.

5. Новичков А. Говорящие картинки: история инфографики по версии ТАСС. URL: jrnlst.ru/iginfographic-history

6. Стюарт И. Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2019. 448 с.

7. Харди Г. Двенадцать лекций о Рамануджане / Перевод А. Арзамасцева. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 336 с.

8. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Концепция электронного журнала с исполняемыми алгоритмами // Фундаментальные исследования. 2013. № 4–4. С. 791–795.

9. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Техническая "Живая книга": приглашение к дискуссии // Высшее образование в России. 2013. № 7. С. 141-144.

10. Карацуба А.А. Венский доклад: о количестве нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2015. № 16. С. 19–31.

11. Воронин С.М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Известия АН СССР. Серия математическая. 1975. Т. 39, № 3. С. 475–486.

12. Atiyah M. The Riemann hypothesis // Google drive archive. 2018. 5 p. URL: drive.google.com/file/d/17NBICP6OcUSucrXKNWvzLmrQpfUrEKuY/view

13. Матиясевич Ю. В. Тайная жизнь дзета-функции Римана. URL:

youtube.com/watch?v=_nAkSJLNxf0

14. Балонин Н. А. История путника Николая Орема. URL: mathscinet.ru/matrices/dzeta/index.php

15. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Специальные матрицы: псевдообратные, ортогональные, адамаровы и критские. СПб: Политехника, 2019. 196 с.

16. Балонин Н.А., Сергеев А.М. Порядок и беспорядок в мире матриц, принцип неограниченно возрастающей сложности // II Международный форум «Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве». СПб.: ГУАП, 2022. С. 14-17.

17. He M., Petoukhov S. Mathematics of Bioinformatics: Theory, Methods and Applications. John Wiley & Sons, 2011. 298 p.

References

1. Ponomarev A.I., Ignat'ev A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2022. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2022/7598.

2. Moshchenko I.N. Inzhenernyj vestnik Dona. 2010. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/216.

3. Orem N. O konfiguracii kachestv [About the configuration of qualities]. Perevod V. P. Zubova. M.: Editorial URSS, 2000. 134 p.

4. Gajdenko V.P., Smirnov G.A. Zapadnoevropejskaya nauka v srednie veka: Obshchie principy i uchenie o dvizhenii [Western European science in the middle ages: general principles and the doctrine of movement]. M.: Nauka, 1989. 352 p.

5. Novichkov A. Govoryashchie kartinki: istoriya infografiki po versii TASS [Talking pictures: the history of infographics according to TASS]. URL: jrnlst.ru/iginfographic-history (accessed 21/01/23)

6. Styuart I. Ukroshchenie beskonechnosti. Istoriya matematiki ot pervyh chisel do teorii haosa [The history of mathematics from the first numbers to chaos theory]. M.: Mann, Ivanov i Ferber, 2019. 448 p.

7. Hardi G. Dvenadcat' lekcij o Ramanudzhane [Twelve lectures on Ramanujan]. M.: Institut komp'yuternyh issledovanij, 2002. 336 p.

8. Balonin N.A., Sergeev M.B. Fundamental'nye issledovaniya. 2013. № 4–4. pp. 791–795.

9. Balonin N.A., Sergeev M.B. Vysshee obrazovanie v Rossii. 2013. № 7. pp. 141-144.

10. Karacuba A.A. Chebyshevskij sbornik. 2015. № 16. pp. 19–31.

11. Voronin S.M. Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya. 1975. Vol. 39, № 3. pp. 475–486.

12. Atiyah M. The Riemann hypothesis. Google drive archive. 2018. 5 p. URL: drive.google.com/file/d/17NBICP6OcUSucrXKNWvzLmrQpfUrEKuY/view

13. Matiyasevich Yu. Tajnaya zhizn' dzeta-funkcii Rimana [The secret life of the Riemann zeta function]. URL: youtube.com/watch?v=_nAkSJLNxf0 (accessed 21/01/23)

14. Balonin N. A. Istoriya putnika Nikolaya Orema [The story of the Nikolai Orem traveler]. URL: mathscinet.ru/matrices/dzeta/index.php (accessed 21/01/23)

15. Balonin N.A., Sergeev M.B. Special'nye matricy: psevdoobratnye, ortogonal'nye, adamarovy i kritskie [Special matrices: pseudo-inverse, orthogonal, Hadamard and Cretan]. St. Petersburg: Polytechnic, 2019. 196 p.

16. Balonin N.A., Sergeev A.M. Poryadok i besporyadok v mire matric, princip neogranichenno vozrastayushchej slozhnosti [Order and disorder in the world of matrices, the principle of infinitely increasing complexity]. II Mezhdunar. forum «Matematicheskie metody i modeli v vysokotekhnologichnom proizvodstve». SPb.: GUAP, 2022. pp. 14-17.

17. He M., Petoukhov S. Mathematics of Bioinformatics: Theory, Methods and Applications. John Wiley & Sons, 2011. 298 p.