Инженерный вестник Дона, №10 (2023)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2023/8754

О динамике круглой мембраны с эллиптическим отверстием

В.Л. Леонтьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация: Эффективность модифицированного метода Фурье, связанного с использованием ортогональных сплайнов, показывается при решении задачи динамики круглой мембраны с эллиптическим отверстием. Апостериорные оценки точности полученных приближенных решений дополняют доказанную ранее теоретическую сходимость алгоритма и характеризуют высокую точность решений задачи динамики мембраны с криволинейной границей, представляющей научно-технический интерес. Различия между приближенными решениями задачи, представленными в виде ортогональных рядов, уменьшаются с увеличением количества узлов сеток, используемых в расчетах.

Ключевые слова: метод Фурье, ортогональные сплайны, конечные ряды, динамика мембраны, эллиптическое отверстие, апостериорная оценка точности.

Введение

Задачи о колебаниях мембран возникают при проектировании конструкций. Решения таких задач рассматриваются во многих статьях, например, [1 – 3]. При этом часто рассматриваются колебания мембран, не имеющих форму круга или прямоугольника, например, колебания мембраны треугольной формы [2] или шестиугольной формы [3]. В таких частных случаях формы границы мембраны удается находить решения задач о колебаниях мембран в бесконечных рядах [2, 3]. Решения динамических краевых задач, в которых все участки границы области состоят из координатных линий или поверхностей, получаются с помощью метода Фурье (метода разделения переменных) [4] с использованием специальных функций [4]. С помощью метода разделения переменных были решены многие краевые задачи [5 – 7]. Однако, задачи в общем случае формы границы мембраны не входят в область применения классического метода Фурье [4]. Такие задачи могут быть решены с помощью метода конечных элементов [8], метода граничных элементов [9], метода конечных разностей

[10]. Но эти решения не имеют форму рядов Фурье, что существенно ограничивает возможности их дальнейших исследований.

В статье [11] предложена модификация алгоритма метода Фурье, связанная с применением ортогональных сплайнов и конечных рядов Фурье, и доказана сходимость этого метода в общем случае формы границы области. Но полученная в [11] априорная оценка сходимости приближенных аналитических решений не характеризует фактическую точность этих решений. Здесь показывается, что метод [11] является эффективным при решении актуальной технической задачи динамики круглой мембраны с эллиптическим отверстием. Приближенные решения задачи, полученные в виде конечных рядов Фурье, подтверждают теоретические результаты [11]. Апостериорные оценки точности приближенных решений дополняют здесь теоретическое исследование сходимости алгоритма [11].

Постановка задачи

Гиперболическая краевая задача

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \forall (x,y)\in S, t\ge 0;$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x,y)\ \ \forall (x,y)\in S;\ u\big|_{\partial S}=0\ \ \forall\ t\ge 0; \qquad (1)$$

является математической моделью динамики мембраны. Здесь ∂S – граница области S мембраны, $u=u(x,y,t)$– прогиб мембраны. Область $\bar{S}=S+\partial S$ – круг, радиус которого равен единице, с отверстием, которое вырезано эллиптической линией:

$$(x-0.66)^2/0.12^2+y^2/0.2^2=1. \qquad (2)$$

Задача (1) рассматривается в случае $a^2=1$ свободных колебаний мембраны на промежутке времени $t\in[0;1.575]$. Граница ∂S состоит из окружности, имеющей радиус равный единице, и эллипса (2). Мембрана в недеформированном состоянии занимает область $\bar{S}$ на плоскости Oxy.

Метод решения

Решение задачи (1) в соответствии с модифицированным методом разделения переменных [11] ищется в виде произведения функций $U(x,y)$ и $V(t)$. Подстановка этого произведения в уравнение, начальные и граничное условия (1) приводит к задаче Штурма-Лиувилля для $U(x,y)$, которая имеет нетривиальные решения $U^{(k)}$, соответствующие собственным значениям λ_k и удовлетворяющих тривиальному граничному условию, а также к уравнению:

$$\frac{\partial^2 V(t)}{\partial t^2} + \lambda_k V(t) = 0 \qquad (3)$$

для определения решений $V^{(k)}(t)$, соответствующих λ_k. В классическом методе Фурье после построения ряда Фурье на основе $U^{(k)}$ и $V^{(k)}$ обеспечивается выполнение двух начальных условий (1).

В модифицированном методе Фурье [11] алгоритм метода за счет применения ортогональных сплайнов позволяет находить приближенные решения задачи (1) в общем случае криволинейной границы области без последовательного решения задачи Штурма-Лиувилля [11] и уравнения (3). Аппроксимация $U(x,y)$ с помощью ортогональных сплайнов в задаче Штурма-Лиувилля и использование конечных разностей в уравнении (3) приводит к системе конечно-разностных уравнений вида [11]:

$$(u^l_{n+1,m} - 2u^l_{nm} + u^l_{n-1,m})/h_1^2 + (u^l_{n,m+1} - 2u^l_{nm} + u^l_{n,m-1})/h_2^2 = (u^{l+1}_{nm} - 2u^l_{nm} + u^{l-1}_{nm})/(\Delta t)^2, \qquad (4)$$

где $u^l_{nm} = U_{nm} V^l$; U_{nm} – приближенные значения $U(x,y)$ в узлах (x_n, y_m) сетки в области $\bar{S}$; V^l – приближенные значения $V(t)$ в моменты времени:

$$t_l = (l-1)\Delta t,\ (l = 1,2,\ldots,M),\ t_l \in [0;1.575];$$

Δt – шаг равномерной сетки по времени; $h_1 = h_2 = h$ – шаги квадратной сетки в области $\bar{S}$, узлы которой имеют координаты:

$$(x_n = -1 + nh,\ y_m = -1 + mh) \in \bar{S},\ 0 \le n,m \le N.$$

Система уравнений (4) используется совместно с однородным граничным условием (1), соответствующим фиксации мембраны на ее границе – на окружности и на эллипсе, с учетом двух начальных условий (1). Функция $\psi \equiv 0$ определяет в (1) начальную скорость всех точек мембраны, а функция:

$$\varphi = 0.6[\sqrt{(x-0.66)^2/0.12^2+y^2/0.2^2}-1][\sqrt{(x-0.66)^2+y^2}-\sqrt{(x-0.66)^2+1-x^2}]^8$$

задает начальный прогиб круглой мембраны, показанный на рис.1.

Нетривиальные решения задачи Штурма-Лиувилля ищутся в форме:

$$U_N^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=M_1(n)}^{M_2(n)} c_{nm}\alpha_n(x)\beta_m(y), \tag{5}$$

где $\alpha_n(x), \beta_m(y)-$ непрерывные ортогональные кусочно-линейные сплайны [11]; постоянные коэффициенты c_{nm} равны значениям $U_N^{(k)}(x,y)\,(k=1,2,...,K)$ в узлах (x_n,y_m) сетки; $M_1(n)<M_2(n)-$ натуральные числа, зависимость которых от n определяется геометрией криволинейной границы мембраны. Граничное условие (1) выполняется, если значения коэффициентов c_{nm}, соответствующих узлам (x_n,y_m), лежащим на границе, полагаются равными нулю.

Конечные ряды Фурье:

$$\sum_{k=1}^{K} U_N^{(k)}(x,y)V^{(k)}(t_l), \tag{6}$$

полученные для моментов времени $t_l\;(l=1,2,...,M)$ и связанные с ортогональными сплайнами [11], формируются в каждый заданный момент времени t_l в форме (6) без предварительного решения задачи Штурма-Лиувилля, без явного определения собственных значений. Реализация такого алгоритма выполняется здесь благодаря применению ортогональных сплайнов в модифицированном алгоритме метода Фурье [11]. Решения системы уравнений (4) совместно с граничным и начальными условиями сразу дают значения решения (6) в узлах сетки в момент времени t_l без детализации членов ряда (6). Линии уровней на рис.2 – 8 соответствуют этим значениям решения (6).

Результаты расчетов, их анализ

Эффективность алгоритма [11] и возможность получения решений в форме рядов Фурье показывается здесь при решении более сложной по сравнению с [11] задачи динамики мембраны, представляющей научно-технический интерес.

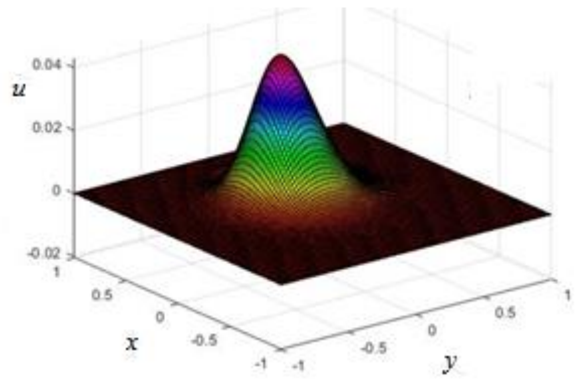


Рис.1.– Начальный прогиб.

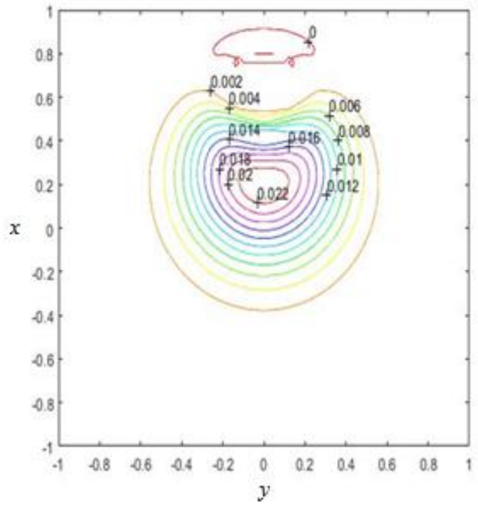


Рис.2.– Линии уровней, $t = 0.075; N = 101$.

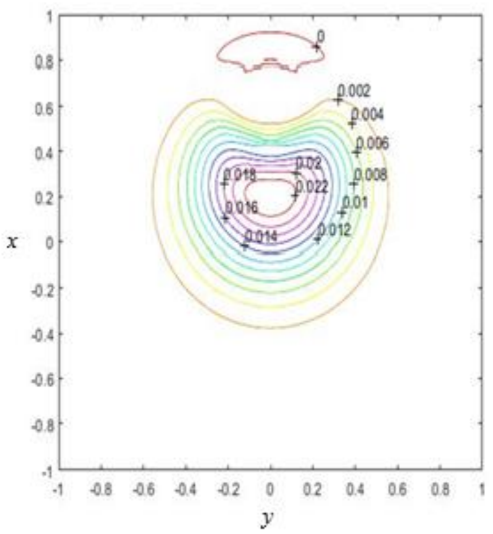


Рис.3.– Линии уровней, $t = 0.075; N = 201$.

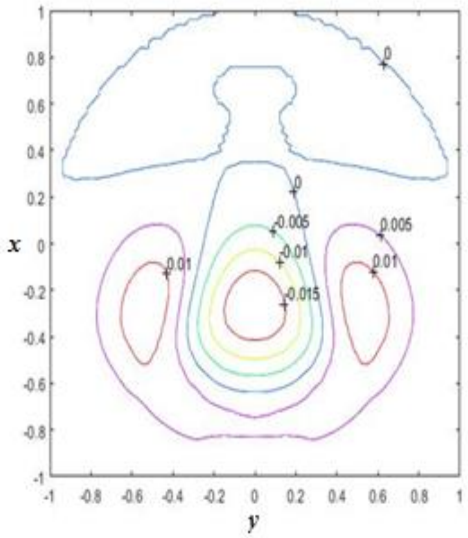
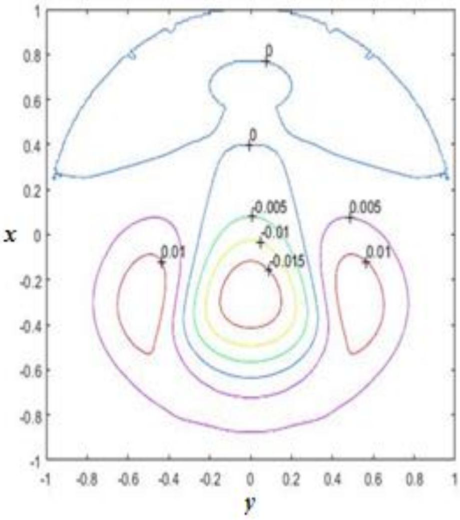


Рис.4. – Линии уровней, $t = 0.9; N = 101$.



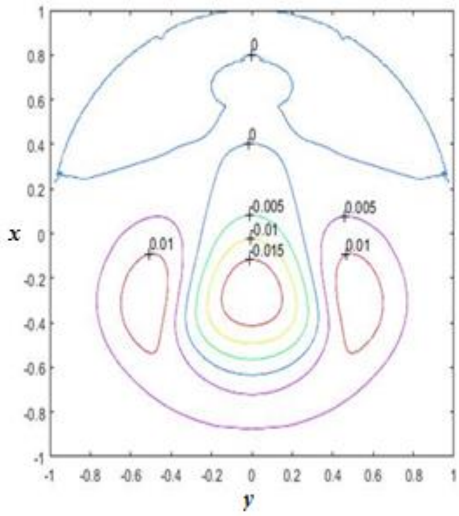
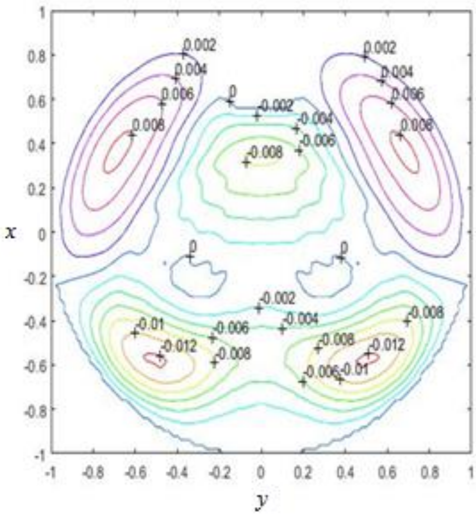


Рис.5.– Линии уровней, $t = 0.9; N = 201.$ Рис.6.– Линии уровней, $t = 0.9; N = 251.$



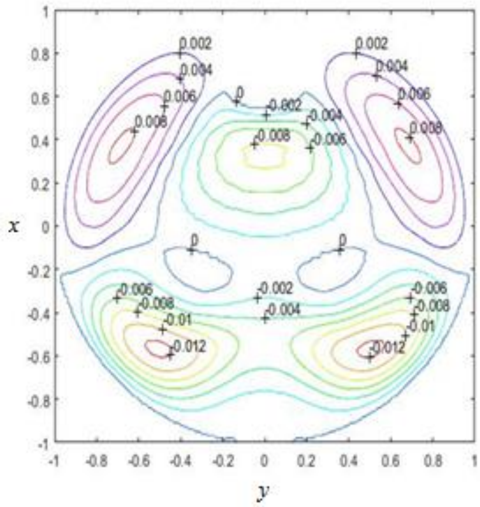


Рис.7.– Линии уровней, $t = 1.575; N = 101.$ Рис.8.– Линии уровней, $t = 1.575; N = 201.$

Линии уровней прогиба мембраны в различные моменты времени показаны на рис.2 – 8. Сравнение линий уровней для решений, полученных на сетках $N = 101$ и $N = 201$ как для указанных на этих рисунках моментов времени, так и для всех остальных моментов времени использованной в расчетах сетки по времени, показывает высокую степень их близости и позволяет сделать вывод о сгущении приближенных решений в форме конечных рядов Фурье при увеличении числа узлов сетки. Сравнение рис.2,3, а также рис.4 – 6 и рис.7,8 друг с другом в каждой группе рисунков показывает коррекцию малых деталей линий уровней и сглаживание линий уровней при увеличении числа узлов сеток. В [11] дано теоретическое доказательство сходимости метода [11], следовательно, полученные в расчетах приближенные решения (рис.4 – 8) сходятся к точному решению.

Апостериорная оценка:

$$\omega_U = \left| l_{N_1} - l_{N_2} \right| / \left| l_{N_2} \right|, \tag{7}$$

характеризует изменение выбранных линий уровней прогиба, показанных на рисунках, при увеличении N от N_1 до N_2. Здесь l_{N_1}, l_{N_2} – характерные размеры выбранных линий уровня, соответствующих значению U.

Апостериорная оценка (7) изменения линий уровней $U = 0$ и $U = 0.005$, соответствующих, например, моменту времени $t = 0.9$, дает следующие значения:

$$N_1 = 101, N_2 = 201: \ \omega_0 = 0.03030; \ \omega_{0.005} = 0.00806;$$

$$N_1 = 201, N_2 = 251: \ \omega_0 = 0.00752; \ \omega_{0.005} = 0.00201.$$

Голубые линии уровня $U = 0$ располагаются на рис.4 – 6 в области $\{-0.65 \le x \le 0.4; \ -0.4 \le y \le 0.4\}$. Оценки ω_0 получаются с использованием l_{N_1}, l_{N_2} линий уровня, которые являются длинами отрезков вертикальных прямых линий ($y = 0$), заключенных между двумя точками их пересечения с линиями уровня $U = 0$. Фиолетовые линии уровня $U = 0.005$ располагаются на рис. 4 – 6 в области $\{-0.9 \le x \le 0.1; \ -0.8 \le y \le 0.8\}$. Оценки $\omega_{0.005}$ получаются с использованием l_{N_1}, l_{N_2} линий уровня, которые являются длинами отрезков горизонтальных прямых линий ($x = -0.3$), заключенных между двумя точками их пересечения с линиями уровня. В переходе от $N_1 = 201$ к $N_2 = 251$ значения оценок ω_0 и $\omega_{0.005}$ значительно меньше, чем в переходе от $N_1 = 101$ к $N_2 = 201$, то есть наблюдается сгущение линий уровней при увеличении N. Такое же сгущение линий уровней имеет место для всех линий уровней в другие моменты времени, что означает сходимость конечных рядов Фурье (6).

Литература

1. Бобылева Т.Н., Шамаев А.С. О задаче управления колебаниями плоской мембраны распределенными силовыми воздействиями // Инженерный вестник Дона, 2023, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2023/8125/.

2. Чернышов Н.А. Моделирование колебания мембраны треугольной формы // Инженерный вестник Дона, 2020, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2020/6336/.

3. Чернышов Н.А., Голомидов Н.А., Маслиев А.И. Моделирование колебания мембраны шестиугольной формы // Инженерный вестник Дона, 2022, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2022/7442/.

4. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Главная редакция физ.-мат. лит-ры изд-ва “Наука”, 1974. 432 с.

5. Гасымов Э.А., Гусейнова А.О., Гасанова У.Н. Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегуляр-ными граничными условиями // ЖВМиМФ, 2016, т.56, №7. С. 1335-1339.

6. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных // ЖВМиМФ, 1972, т.12, №3. С. 627-638.

7. Савичев И.С., Чернышев А.Д. Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра // Известия РАН. Механика твердого тела, 2009, №3. С. 151-162.

8. Strang G., Fix G.J. An Analysis of the Finite Element Method. N.J.: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1973. 349 p.

9. Brebbia C.A., Walker S. Boundary Element Techniques in Engineering. London: Butterworths, 1980. 210 p.

10. Усов А.Б. Конечно-разностный метод решения уравнений Навье–Стокса в переменной области с криволинейными границами // ЖВМиМФ, 2008, т.48, №3. С. 491-504.

11. Leont’ev V.L. Finite Fourier Series in Hyperbolic Initial-Boundary Value Problems for Domains with Curved Boundaries // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2022, т.62, №10. С. 1632-1650.

References

1. Bobyleva T.N., Shamaev A.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2023, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2023/8125/.

2. Chernyshov N.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2020, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2020/6336/.

3. Chernyshov N.A., Golomidov N.A., Masliev A.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2022/7442/.

4. Arsenin V.Ya. Metodi matematicheskoy fiziki i spetsialnie funktsii [Methods of Mathematical Physics and Special Functions], M.: Nauka, 1974. 432 p.

5. Gasymov E.A., Guseinova A.O., Gasanova U.N. ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 2016, Vol.56, №7. pp. 1305–1309.

6. Malov Yu.I., Martinson L.K., Pavlov K.B. ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 1972, Vol.12, №3. pp. 71–86.

7. Savichev I.A., Chernyshov A.D. Mech. Solids, 2009, №3. pp. 463–472.

8. Strang G., Fix G.J. An Analysis of the Finite Element Method. N.J.: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1973. 349 p.

9. Brebbia C. A., Walker S. Boundary Element Techniques in Engineering. London: Butterworths, 1980. 210 p.

10. Usov A.B. ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 2008, Vol.48, №3. Pp. 464–476.

11. Leontiev V.L. ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 2022, Vol.62, №10. pp. 1632-1650.