

Исследование концентрации напряжений в особых точках сечений элементов конструкций, подкрепленных покрытиями

Б.В. Соболев, А.Н. Соловьев, Е.В. Рашидова, А.И. Новикова

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Рассмотрены точки концентрации напряжений в сечениях конструктивных элементов. К ним, в частности, относятся вершины трещин, которые могут появиться как в процессе эксплуатации, так и в результате нарушения технологии их производства. Получены значения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещин в рассматриваемых сечениях с угловыми точками контура. Кроме того, проведено исследование показателей в асимптотическом решении задачи теории упругости для тел из изотропных материалов в окрестности угловой точки сечения стержневого элемента конструкции, где стороны (или одна из них) поддерживаются тонким покрытием. На другой стороне угловой области предполагаются различные условия ее подкрепления, в том числе наличие тонкого упругого покрытия. Математическое решение задачи приводится к решению трансцендентного характеристического уравнения, то есть, к задаче нахождения корней уравнения, которое строится, исходя из условия существования ненулевого решения системы линейных однородных уравнений. Были определены характеристики компонент напряжений для различных комбинаций граничных условий, физических и геометрических параметров. Сделаны качественные выводы. В частности, установлены комбинации значений этих параметров, при которых поведение напряжений в угловой точке сечения становится сингулярным.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, изотропные упругие тела, конструктивный элемент, угловая точка сечения, трещина, тонкое упругое покрытие, граничные условия, характеристическое уравнение, концентрация напряжений.

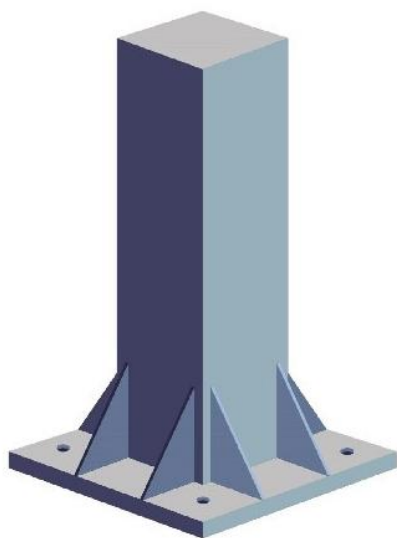
В современном строительстве и машиностроении большое внимание уделяется прочности и устойчивости, а, значит, и надежности строительных конструкций. Особое внимание при этом следует уделять зонам концентрации напряжений, возникающим вблизи особых точек сечений элементов строительных конструкций. Таковыми являются, как правило, технологические и эксплуатационные дефекты (трещины, шлаковые включения и т.д.), а также угловые точки сечений.

Анализ напряжённо-деформированного состояния сечений элементов строительных конструкций позволяет оценивать ресурсные параметры и прогнозировать возможный выход из строя объектов контроля. В последние десятилетия для решения этих задач широко используются численные

методы, например, решение задач строительной механики традиционно строится на методе конечных элементов.

Наряду с этим, развитие аналитических методов оценки критического состояния в области строительной механики сохраняет свою актуальность.

Элементы строительных конструкций, имеющие в сечении угловые точки (прямоугольные, квадратные и др.) находят широкое распространение (рис.1).



а) Квадратное сечение



б) Шестиугольное сечение

Рис.1 – Стержни колонн

Введение

В классической теории упругости рассматриваются двумерные и трехмерные задачи, определяющие поведение напряжений в угловых точках границы тела. В процессе эксплуатации на элементы строительных конструкции действует разнообразная нагрузка, которая в соответствии с теорией Гриффитса освобождается в процессе возникновения и роста трещин. Вопросы оценивания износостойкости и критического состояния элементов конструкций проводится на основе изучения и исследования концентрации напряжений в критических (крайних или угловых) точках.

Для задач теории упругости, исследующих поведение напряжений в особых точках, широко распространена схема, предполагающая решение локальной задачи в окрестности особой точки, производится построение характеристического уравнения, вычисляются его корни (собственные числа). Исходя из этого, устанавливается поведение напряжений в окрестности угловой точки, в асимптотическом понимании делаются выводы о сингулярности асимптотического решения, при этом сама точка исключается из рассмотрения [1 – 3].

В работе [4] проведено исследование решения задачи для клина, построенного на основе собственных чисел характеристического уравнения для случая граничных условий, определяющих свободные грани клина, когда на гранях имеются нулевые компоненты тензора напряжений, этот случай в работе [5] назван, как случай II – II. Исследование [5] также включает рассмотрение задачи о плоском клине. Помимо указанного выше случая граничных условий, рассмотрены варианты, когда обе грани клина неподвижны, то есть на них имеются нулевые значения компонентов вектора перемещений (случай I – I), либо грани имеют плавный контакт с основанием, что соответствует нулевому касательному напряжению и нулевому нормальному перемещению (случай III – III). Приведены характеристические трансцендентные уравнения для указанных случаев, а также для случаев смешанных типов граничных условий, когда на одной грани клина задано одно из условий I – III, а на другой – отличное от него из того же диапазона. В работе найдены наименьшие значения решений для диапазона раскрытия угла клина $[0; 2\pi]$, сделаны выводы об особенностях решения.

Условия наличия на гранях угловой области тонкого гибкого нерастяжимого покрытия, защищенного от внешних воздействий (обозначено – случай IV–IV), рассматривалось А.Н. Соловьевым,

Б.В. Соболев и др. [6]. Был также исследован случай, когда это условие на одной из граней угла рассматривается в сочетании с вышеуказанными условиями I, II, III на другом ребре.

Указанные выше собственные числа являются показателями степеней при построении асимптотического разложения решения в окрестности критической точки. Выражения для коэффициентов асимптотического разложения можно определить способом, представленным в работе [7]. В работе [8] с использованием декартовой системы координат представлен другой способ построения асимптотического решения, который также применим для задач об анизотропных телах. Общий подход к построению асимптотического ряда был предложен А.В. Белоконем [9].

В наших публикациях [10, 11] мы рассмотрели ряд задач о равновесном состоянии упругих тел, которые поддерживаются тонким гибким покрытием и содержат внутренние трещины. В этих работах представлены результаты исследования плоских задач теории упругости, соответственно, для полосы и клина, поврежденных внутренними трещинами и усиленных тонким покрытием на границах. Мы также рассмотрели случаи как для более жесткого, так и для более мягкого материала покрытия по сравнению с материалом основного корпуса. Уравнение, математически моделирующее подкрепление границы тонким упругим покрытием, представляет собой граничное условие, построенное на основе асимптотического анализа решения задачи для упругой полосы [12]. Проведено исследование граничных условий в окрестности вершины трещины в плоской и антиплоской задачах, что позволило подбором соответствующих параметров снизить сингулярность напряжений [13]. В работе [14] изучалось влияние граничного усиления на локальные сингулярные поля в линейно упругих материалах. Задача для четверти плоскости сжимаемого гиперупругого материала, подвергающегося плоским конечным деформациям, была

рассмотрена в [15]. Тело подвержено смешанным (свободно фиксированным) граничным условиям. Было установлено, что поле деформации является гладким в окрестности вершины и фактически ограничено в самой вершине в отличие от аналогичного случая классической линейной упругости.

Проблемы концентрации напряжений в композитных упругих деталях, в дополнение к проблемам прочности элементов строительных конструкций, представляют геофизический интерес. В работе [16] автор расширил задачу о симметричном и антисимметричном нагружении изотропной однородной пластины, содержащей трещину, до случая, когда линия трещины разделяет две отдельные изотропные однородные области. В работе определен модуль сингулярного поведения напряжений в окрестности вершины трещины. Исследование [1] было сосредоточено на проблемах плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния двух разнородных ортогональных упругих областей с угловой точкой, скрепленных вместе на одном из их краев, а на остальных - произвольной нормальной и сдвиговой силы в рамках классической теории упругости. Исследовано асимптотическое поведение решения в окрестности линии сопряжения. Результаты обобщены на случай произвольных углов [2]. Как и прежде, акцент делается на изучении зависимости порядка сингулярности напряжений в окрестности вершины клина от значений физических и геометрических параметров задачи. Работа [17] демонстрирует технологию расчета напряженно-деформированного состояния композитного упругого тела с использованием метода конечных элементов в окрестности особых точек границы раздела. В работе [18], для задачи об анизотропном клине, представлено общее решение, позволяющее найти порядок сингулярности напряжений, который зависит от угла раствора, граничных условий и свойств материала. Порядок распределения напряжений в верхней части клина из обычных анизотропных материалов был изучен в [19]. На его сторонах

заданы смешанные граничные условия. В работе [20] дана оценка величины интенсивности напряжений в верхней части угла клина, используя контурный интеграл, основанный на обратной теореме Бетти в сочетании с методом конечных элементов. Особенности напряжений в биметаллическом анизотропном клине с произвольной ориентацией волокон были изучены в [21]. В работе [22] проведено исследование особенностей напряжений в клиньях с использованием комплексного подхода в теории деформаций сдвиговых пластин. Основное внимание уделяется вычислению индекса сингулярности как фундаментальной величины в механике разрушения. Авторы рассмотрели изотропные однородные и биметаллические клинья. Эта рукопись посвящена исследованию концентрации напряжений в верхней части клиновидной области, когда по ее краям имеется тонкое покрытие, которое находится в гладком контакте с двумя жесткими основаниями (случай $V - V$), а также комбинации условия V на одном краю клина с условиями I, II, III и IV к другому.

1. Показатель особенности напряжений в угловой точке сечения (Задача1)

1.1 Постановка задачи

Исследуется статическая задача теории упругости о плоской деформации клиновидной области, усиленной на границе тонким покрытием. Рассмотрены уравнения равновесия в перемещениях в полярной системе координат $Or\theta$. Полюс расположен в вершине угловой области. Тангенциальная нормальная компонента напряжений σ_θ и касательная $\tau_{r\theta}$ выражены через компоненты вектора перемещений u_r, u_θ .

Запишем граничные условия для клиновидной области $-\alpha \leq \theta \leq +\alpha, 0 \leq r < \infty$ с тонким покрытием с обеих сторон, которое закреплено вдоль

нормали. Учитывая результаты Александрова и Мхитаряна [12], они имеют вид: $\theta = \alpha$:

$$u''_r = \frac{(1 - \nu_c)}{4G_c h} \tau_{r\theta} - \frac{\nu_c}{2G_c} \sigma'_{\theta} \quad (1)$$

$$u_{\theta} = 0 \quad (2)$$

где G – модуль упругости, ν_c – коэффициент Пуассона материала покрытия элемента конструкции, h – толщина покрытия.

Здесь исследуется однородная краевая задача. Случай, когда на границе области компоненты смещений и напряжений равны нулю. Поэтому граничное условие (1) упрощается и принимает вид случая V. Для границы с покрытием, свободной от напряжений – случай IV; такое условие было ранее сформулировано [13, 14]. Таким образом, можно указать один из случаев граничных условий на каждой из границ области:

$$\begin{aligned} \text{I - } & u_r = 0, \quad u_{\theta} = 0 \\ \text{II - } & \sigma_{\theta} = 0, \quad r_{r\theta} = 0 \\ \text{III - } & u_{\theta} = 0, \quad r_{r\theta} = 0 \\ \text{IV - } & u_r'' = 0, \quad \sigma_{\theta} = 0 \\ \text{V - } & 2G_c u_r'' + \nu_c \sigma_{\theta}' = 0, \quad u_{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрены задачи, когда условие V задано с обеих сторон клиновидной области, а именно, случай V–V, а также для случаев смешанных условий, т.е. на сторонах области задаются различные граничные условия (V–I, V–II, V–III, V–IV, индексация здесь очевидна).

В соответствии с работой Партона и Перлина [5], мы будем искать решение системы уравнений равновесия в перемещениях в виде произведения функций:

$$u_r(r, \theta) = r^\lambda f(r, \theta), u_\theta(r, \theta) = r^\lambda e(\theta) \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) для каждого из описанных случаев в уравнения равновесия и граничные условия, сводим проблему к задаче определения корней трансцендентных характеристических уравнений, вытекающих из условия существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений.

1.2 Результаты и выводы (Задача 1)

В первом разделе этой статьи проанализировано поведение показателя асимптотического решения в окрестности угловой точки в зависимости от угла раствора в плоской изотропной задаче теории упругости, когда одна граница имеет тонкое покрытие и зафиксирована вдоль нормали (условие V в (3)). Рассмотрен набор возможных условий (условия I – V в (3)) на другой границе, включая наличие покрытия (условия IV, V в (3)). В частности, задача IV–V с равным углом решения может быть интерпретирована, как задача введения гладкого плоского штампа в полуплоскость, покрытую на границе. В рассмотренных пяти краевых задачах построены асимптотические решения и получены уравнения, которые связывают показатель степени, угол раствора и механические свойства основного материала сечения с угловой точкой и покрытия. Численный анализ этих уравнений был проведен для более жесткого по сравнению с основным материалом покрытия с заданными механическими характеристиками.

Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при оценке прочности конструктивных элементов с покрытиями и при построении численно-аналитических методов анализа напряженно-деформированного состояния упругих тел с покрытиями.

Приведем некоторые из полученных результатов. В частности, установлено:

В задачах V-IV и V-III особенность напряжений проявляется раньше, чем в задачах V-V и V-I, и возникает, когда угол раствора клина становится прямым, а показатель λ достигает значения 0,5, когда клин разворачивается в полуплоскость. Корневая особенность в данном случае связана с изменением типа граничных условий при пересечении полюса.

2. Равновесная прямолинейная трещина вблизи угловой точки сечения конструкции с тонким покрытием (Задача 2)

Рассмотрено клиновидное сечение конструкции, усиленное тонким гибким покрытием, и с внешней стороны которого отсутствуют напряжения. Сечение содержит внутреннюю трещину на биссектрисе, находящуюся от вершины клина на расстоянии, соизмеримым с размером трещины. В окрестности вершин трещины проведено изучение концентрации напряжений, при условии, что трещина раскрывается под действием нормальных сил, приложенных к ее границам. Поддерживающее покрытие граней клина моделируется математически, граничным условием, корректность которого основана на асимптотическом решении задачи о полосе и подтверждена вычислительным экспериментом. Схема решения основана на интегральное преобразование Меллина [23], которое позволяет перейти к решению сингулярного интегрального уравнения I-го рода с ядром Коши (СИУ). Решение СИУ строится методом коллокаций.

Первопроходцами в исследовании тел с тонкими покрытиями стали работы [24 – 26]. Результаты многих исследований для задач теории упругости с тонкими покрытиями, собраны и обобщены в работе [12]. Также некоторые работы посвящены изучению влияния поперечных трещин на разрушения в упругих телах [27 – 29], результаты многих исследований собраны в справочнике по коэффициентам интенсивности напряжений [30].

Решена двумерная задача для упругого клина, содержащего на оси симметрии прямые трещины-разрезы, со свободными от напряжений сторонами. Найдены точные и приближенные решения для задач, когда конечная трещина берет начало в вершине клина [30 – 32], когда трещина удалена от вершины и представляет собой полубесконечный разрез [33, 34], когда внутренняя трещина конечна [35]. Контактная задача для трехмерного клина изучена в работе [36], построены асимптотические решения задачи. Двумерная задача Лапласа об упругой клиновидной области численно решена в работе [37].

2.1 Метод разрывных решений в задачах теории упругости для областей с разрывами

Метод разрывных решений, иначе именуемый методом обобщенных интегральных преобразований, впервые был предложен в работах Г.Я. Попова в начале 80-х годов прошлого столетия [38]. Его идея заключалась в применении интегрального преобразования (того или иного) вдоль координатной линии, пересекающей другую, на которой искомые функции терпят разрыв. При этом непременным требованием является то, что сама область, равно как и имеющие место разрывы должны вписываться в координатную сетку ортогональной системы координат. Технология этого метода заключается в том, что интервал интегрирования разбивается на две части – до и после линии разрыва, и производится интегрирование по частям. При этом, сами функции разрыва выделяются как внеинтегральные члены.

2.2 Постановка задачи

Проведем исследование задачи о бесконечном упругом клине, грани которого усилены тонким покрытием, в полярных координатах клин определяется следующей областью:

$$r \geq 0, \quad |\varphi| \leq \alpha$$

На оси симметрии находится конечная трещина – разрез: $\varphi = 0$, $a \leq r \leq b$. Нормальные силы – $p(r)$ поддерживают трещину в раскрытом состоянии. На бесконечности, при $r \rightarrow \infty$, область имеет нулевые перемещения.

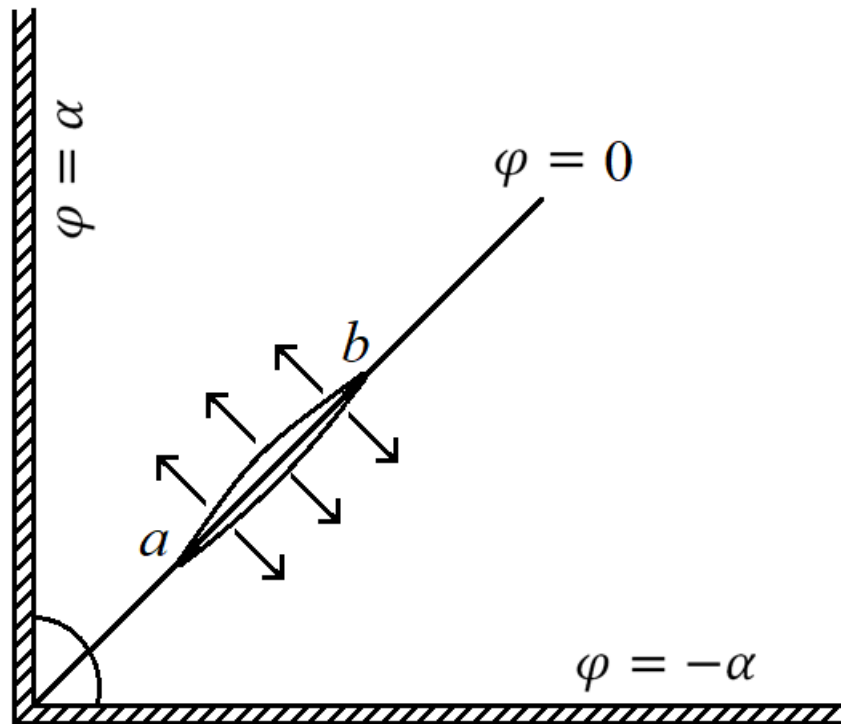


Рис. 2 - Трещина в окрестности угловой точки сечения

Введем обозначения для разрывов функций в области трещины (при $\varphi = 0$, $a \leq r \leq b$):

$$[v(r, \varphi)] = \gamma(r), \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] = \beta(r); \quad [f] = f|_{x=-0} - f|_{x=+0} \quad (5)$$

Решение задачи в полярной системе координат строим на основании закона Гука и уравнений Ламе.

Условия сопряжения имеют вид:

$$\varphi = 0: \quad \sigma_\varphi = -p(r) \text{ при } a \leq r \leq b, \quad v = 0 \quad (6)$$

при $0 \leq r < a$ и $r > b$.

Граничные условия:

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad r \geq 0 \quad (7)$$

$$\varphi = \alpha: \quad \sigma_\varphi = 0, \quad u_r'' = \frac{(1-\nu_c)}{4G_c h} \tau_{r\varphi} - \frac{\nu_c}{2G_c} \sigma_\varphi' \quad (8)$$

Воздействие гибкого тонкого покрытия учитывается условием (8), которое обосновано асимптотическим анализом решения задачи для полосы [12] и подтверждено численным экспериментом.

В схеме решения интегральное преобразование Меллина [24] приводит задачу к решению системы 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнив граничные условия и условия сопряжения, осуществив переход к безразмерным переменным, получаем СИУ с ядром Коши:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty M \left(u, a \cdot \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \right) du \right] d\xi = -\frac{\pi}{\theta} q(x) \quad (9)$$

где $q(x) = p \left(a \cdot \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \right) \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right)$; $\varphi(\xi)$ – искомая безразмерная функция разрыва.

2.3 Метод коллокаций решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Коши

Решение СИУ (9) проведено методом коллокаций. Искомую функцию $\varphi(\xi)$ зададим, как произведения 1-го множителя, позволяющего явно выделить сингулярность, и 2-го множителя, представляющего линейную комбинацию полиномов Чебышева $T_j(\xi)$ первого рода:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{j=1}^N A_j T_j(\xi) \quad (10)$$

здесь A_j – искомые коэффициенты, N – число точек коллокаций.

Для построения точек используем корни полиномов Чебышева:

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

Выражение (10) позволяет привести задачу к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $f(x) = -\frac{\pi}{\theta} q(x)$.

Коэффициенты СЛУ (12) вычисляются по формуле:

$$\alpha_{ij} = \int_{-1}^1 T_j(\xi) \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left[\frac{1}{\xi - x_i} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} M \left(u, a \cdot \exp \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) \right) du \right] d\xi \quad (13)$$

Первое слагаемое – сингулярная часть:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} \right] d\xi = \pi U_{n-1}(x)$$

есть табличный интеграл, равный $\pi U_{n-1}(x)$ [39], где $U_{n-1}(x)$ – полиномы Чебышева 2-го рода. Второе слагаемое находится численно.

Найденная функция разрыва $\varphi(x)$, позволяет найти значение коэффициента интенсивности K нормальных напряжений в окрестности вершин трещины:

$$K = \pm \lim_{x \rightarrow \mp 1 \pm 0} (\varphi(x)(1 \pm x)^{1/2}) \quad (14)$$

Выявлена зависимость точности найденного решения между числом точек коллокаций и величиной искусственно введенного безразмерного параметра λ , характеризующего размер трещины и ее положение относительно вершины клина. Точность решения уменьшается с ростом

значения λ . Проведенные численные эксперименты позволили сделать вывод: решение уравнения (9) с ошибкой до 5% для $\lambda = 0.8$ обеспечивается не менее чем 8 точками; для $\lambda = 0.6$ требуется не менее 5 точек при той же точности решения.

Результаты и выводы

Ввиду того, что построенное решение зависит от многих параметров задачи, определяющих геометрию сечения и физические свойства материалов, представленные выводы имеют качественно-обобщенное значение.

Для каждого конкретного набора параметров задачи в результате численного эксперимента вычислялось значение фактора влияния [11], характеризующего влияние заданных параметров задачи на величину концентрации напряжений.

Проведены исследования фактора влияния, позволяющие оценить воздействие геометрии сечения (раствор угла клина), удаления трещины от угловой точки (вершины клиновидного сечения), толщины и жесткости накладки на поведение коэффициента интенсивности напряжений. В ходе проведенных численных расчетов была задана различная относительная толщина усиливающей накладки ($\frac{2h}{b-a} = 0,01; 0,02; \dots 0,05$); исследовано влияние жесткости материала накладки, более мягкой (например, тефлона или алюминия), и жесткой (например, карбид вольфрама) по отношению к основному материалу элемента конструкции. Результаты проведенных расчетов позволяют констатировать следующее:

- значение фактора влияния снижается под действием:
 - увеличения угла раскрытия клина;
 - утолщения покрытия;
-

- увеличения жесткости покрытия;
- значение фактора влияния увеличивается под действием:
 - приближения трещины к вершине клина;
 - увеличения длины трещины.

В ходе проведенных числовых экспериментов исследованы известные частные случаи, такие, как раскрытие клина в полуплоскость; толщина покрытия равна нулю, что соответствует его отсутствию. Полученные в этих случаях результаты с допустимыми погрешностями совпали с известными данными.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-38-90248.

Литература

1. Bogy D.B. Edge bonded dissimilar orthogonal elastic wedge under normal and shear loading. Journal of Applied Mechanics. 1968. V.90. Pp. 460 – 466
2. Bogy D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. Journal of Applied Mechanics. 1971. V. 38. Pp. 377 – 386
3. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. Изд. 31. №1. Сс. 178 – 186.
4. Karp S.N., Karal F.C.J. The elastic-field behavior in the neighborhood of a crack of arbitrary angle. Comm. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. № 4. Pp. 413 – 421
5. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Мир, 1984. 674 с.

6. Соловьев А.Н., Соболев Б.В., Васильев П.В., Рашидова Е.В. Особенности напряжений в вершине упругого клина, подкрепленного тонким гибким покрытием на его сторонах // XV Междунар. науч.-тех. конф. «Динамика технических систем» (DTS-2019). Ростов-н/Д: AIP Conference Proceedings 2188, 040014. – 2019. doi: 10.1063/1.5138423

7. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Зап. науч. сем. ЛОМИ, Изд. «Наука». Ленинград. 1975. Вып. 76. Сс. 29 - 60.

8. Каландия А.И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов // Прикладная математика и механика. 1969. Вып.33. № 1. 1969. Сс. 27–131.

9. Белоконов А.В. Колебания и волны в полуограниченных и ограниченных телах: дис. д-ра наук: 01.02.04 Физические и математические науки. Ростов-н/Д. 1987. 450 с.

10. Sobol B.V, Soloviev A.N, Krasnoschekov A.A. The transverse crack problem for elastic bodies stiffened by thin elastic coating // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2015. № 11. Pp. 1302-1314

11. Sobol B.V, Soloviev A.N, Rashidova E.V, Vasiliev P.V. Equilibrium state of the internal crack in the infinite elastic wedge with thin coating. // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2018. № 98. Pp. 659-674

12. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 488 с.

13. Kim C.I., Ru C.Q., Schiavone P.A. Clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects // Mathematics and Mechanics of Solids. 2013. № 18(1). Pp.59-66

14. Kim C.I., Schiavone P. Ru C.Q. Effects of boundary reinforcement on local singular fields in linearly elastic materials // Archives of Mechanics. 2013. № 65(4). Pp. 289-300
 15. Kim C.I., Ru C.Q., Sudak L.J., Schiavone P. Analysis of local singular fields near the corner of a quarter-plane with mixed boundary conditions in finite plane elastostatics // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2012. №47(2). Pp. 151–155
 16. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bulletin of the Seismological Society of America. 1959. V. 49, № 2. Pp. 199-204
 17. Munz D., Yang Y.Y. Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors // International Journal of Fracture. 1993. V. 60. Pp.169-177
 18. Chue C.H., Liu C.I. A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge // The International Journal of Solids and Structures. 2001. V.38. Pp.6889-6906
 19. Chuang W.Y., Sung J.C., Chung W.G. Stress singularities of two special geometries of wedges with free–mixed boundary conditions // Computers and Structures. 2003. V. 81. Pp. 167-176
 20. Qian Z.Q., Akisanya A.R. Wedge corner stress behaviour of bonded dissimilar materials // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 1999. V. 32. Pp. 209-222
 21. Chue C.H., Liu C.I. Stress singularities in a bimaterial anisotropic wedge with arbitrary fiber orientation // Composite Structures. 2002. V. 58. Pp. 49 –56
 22. Felger J., Becker W.A. Complex potential method for the asymptotic solution of wedge problems using first-order shear deformation plate theory // European Journal of Mechanics - A/Solids. 2017. V.61. Pp. 383-392
-

23. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Наука, Ленингр. отд., Л. 1967, 402 с.
 24. Melan E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums // Archive of Applied Mechanics. 1938. № 9/2. Pp. 116-126
 25. Рейсснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек. Упругие оболочки. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 263 с.
 26. Koiter W., Warner T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. 1966. № 69. Pp.1-54
 27. Cook T.S., Erdogan F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface. Int.J. Engng. Sci., 1972, 10. Pp. 677-697
 28. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка. 1976. 443 с.
 29. Краснощеков А.А., Соболев Б.В. Равновесное состояние внутренней поперечной трещины в полубесконечном упругом теле с тонким покрытием. Известия РАН., МТТ, 2016, №1, Сс. 136-150.
 30. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений, Т.1: пер. с англ./Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир. 1990. 448 с.
 31. Сметанин Б.И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. Сс. 708-714.
 32. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. // Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – М: «Физматлит». 1993. 224 с.
 33. Stone S.F., Westmann R.A. Stress intensity factors for cracked wedges // Intern. J. Solids and Struct. 1981. V. 17. № 3. Pp.345-358
 34. Кипнис Л.А. Упругое равновесие клина с трещиной // ПММ. 1979. Т. 43. № 1. Сс. 153-159.
-

35. Некихлых Е.М., Острик В.И. Задача об упругом равновесии клина с трещинами на оси симметрии. Известия РАН., МТТ. 2010. №5. Сс. 111-129.

36. Пожарский Д.А., Молчанов А.А. Асимптотические решения смешанных задач для упругой полосы и клина. Вестник ДГТУ. 2010. Т.10 №4(47). Сс. 447-454.

37. Elliotis M.C., Charmpis D.C., Georgiou G.C. The singular function boundary integral method for an elastic plane stress wedge beam problem with a point boundary singularity. Applied Mathematics and Computation, 2014. V. 248. Pp.93-100.

38. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука. 1982. 342 с.

39. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.

References

1. Bogy D.B. Journal of Applied Mechanics. 1968. V.90. Pp. 460-466
2. Bogy D.B. Journal of Applied Mechanics. 1971. V.38. Pp. 377-386
3. Aksentyan O.K. Prikladnaya matematika i mekhanika. 1967. V. 31. №1. Pp. 178 –186.
4. Karp S.N., Karal F.C.J. Comm. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. № 4. Pp. 413 – 421
5. Parton V.Z, Perlin P.I. Metody matematicheskoy teorii uprugosti [Mathematical methods of the theory of elasticity].M.: Mir. 1984. 674 p.
6. Soloviev A.N, Sobol B.V, Vasiliev P.V, Rashidova E.V. XV Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferenciya «Dinamika tekhnicheskikh sistem» (DTS-2019): AIP Conference Proceedings 2188, 040014. 2019.

7. Mazya V.G., Plamenevsky B.A. O koeffitsiyentakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh krayevykh zadach v konuse. Zap. nauch. sem. LOMI. Nauka. Leningrad. 1975. № 76. Pp. 29-60.
 8. Kalandia A.I. J Appl. Math. Mech. 1969. № 33. Pp. 127–131
 9. Belokon A.V. Kolebaniya i volny v poluogranichennykh i ogranichennykh telakh [Vibrations and waves in semi-bounded and bounded bodies]. Doctoral Dissertation, Physical and Mathematical Sciences, Rostov-na-Donu, 1987. 450 p.
 10. Sobol B.V, Soloviev A.N, Krasnoschekov A.A. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2015. № 11. Pp. 1302-1314
 11. Sobol B.V, Soloviev A.N, Rashidova E.V., Vasiliev P.V. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2018. № 98. Pp. 659-674.
 12. Aleksandrov V.M, Mkhitaryan, S.M. Kontaknyye zadachi dlya tel s tonkimi pokryiyami i prosloykami [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]. M.: Nauka. 1983. 488 p.
 13. Kim C.I., Ru C.Q., Schiavone P.A. Mathematics and Mechanics of Solids. 2013. № 18(1). Pp. 59-66.
 14. Kim C.I., Schiavone P. Ru C.Q. Archives of Mechanics. 2013. № 65(4). Pp. 289-300
 15. Kim C.I., Ru C.Q., Sudak L.J., Schiavone P. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2012. №47(2). Pp. 151–155.
 16. Williams M.L. Bulletin of the Seismological Society of America. 1959. Vol. 49, № 2. Pp. 199-204
 17. Munz D., Yang Y.Y. International Journal of Fracture. 1993. V. 60. Pp. 169-177
 18. Chue C.H., Liu C.I. The International Journal of Solids and Structures. 2001. V.38. Pp. 6889-6906
 19. Chuang W.Y., Sung J.C., Chung W.G. Computers and Structures. 2003. V.81. Pp.167-176
-

20. Qian Z.Q., Akisanya A.R. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 1999. V. 32. Pp. 209-222
 21. Chue C.H., Liu C.I. Composite Structures. 2002. V.58. Pp. 49 –56
 22. Felger J., Becker W.A. European Journal of Mechanics - A/Solids. 2017. V.61. Pp. 383-392
 23. Uflyand Y.S. Integralnyye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti [Integral transformations in problems of elasticity theory]. Nauka. Leningr. ed. L. 1967. 402 p.
 24. Melan E. Archive of Applied Mechanics. 1938. № 9/2. Pp. 116-126
 25. Reyssner E. Nekotoryye problemy teorii obolochek. Uprugiye obolochki [Some problems of shell theory. Elastic shells]. M.: Foreign Languages Publishing House. 1962. 263 p.
 26. Koiter W., Warner T. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. 1966. № 69. Pp. 1-54
 27. Cook T.S., Erdogan F. Int.J. Engng. Sci., 1972, 10. Pp. 677-697
 28. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. Raspredeleniye napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh [Stress distribution around cracks in plates and shells]. Kiyev: Naukova Dumka. 1976. 443 p.
 29. Krasnoshchekov A.A., Sobol B.V. Mekhanika tverdogo tela. 2016. № 1. Pp. 136-150
 30. Stress intensity factors handbook. V.1.: editor-in-chief Y. Murakami. M.: Mir. 1990. 448 p.
 31. Smetanin B.I. Prikladnaya matematika i mekhanika .1968. T. 32. №. 4. Pp. 708-714
 32. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol B.V. Tonkiye kontsentratory napryazheniy v uprugikh telakh [Thin stress concentrators in elastic bodies]. M: Fizmatlit. 1993. 224 p.
-



33. Stone S.F., Westmann R.A. Intern. J. Solids and Struct. 1981. V. 17. № 3. Pp. 345-358
34. Kipnis L.A. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1979. V. 43. № 1. Pp. 153-159
35. Nekislykh E.M., Ostriuk V.I. Mechanics of Solids. 2010. №5. Pp. 111-129
36. Pozharskiy D.A., Molchanov A.A. Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2010. T.10 №4 (47). Pp. 447-454
37. Elliotis M.C., Charmpis D.C., Georgiou G.C. Applied Mathematics and Computation, 2014. V. 248. Pp. 93-100.
38. Popov G.Y. Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleny [Concentration of elastic stresses nearby stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements]. M: Nauka. 1982. 342 p.
39. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Table of Integrals, Series, and Products]. M.: Fizmatgiz. 1963. 1100 p.