

Устойчивость стержневой конструкции многоугольного кольца при радиальной нагрузке

Д.А. Журавлев

Донской государственный технический университет

Аннотация: Представлены результаты исследования устойчивости стержневой конструкции многоугольного кольца, находящегося под действием системы самоуравновешенных радиальных сил. Приведено полное решение задачи в соответствии с основополагающими уравнениями теории Р. Мизеса применительно к статически определимой плоскостной конструкции. Установлено, что параметр неустойчивости стержневой конструкции шестиугольного кольца определяется исключительно числом узловых точек шарнирно стержневой системы.

Ключевые слова: стержневая конструкция, правильный многоугольник, гиперboloид, кольцевая диафрагма, детерминант, характеристический полином, циклическая симметрия.

Для анализа устойчивости плоскостных и пространственных ферм как совокупности стержней, рассматриваемых в их взаимной внутренней связи, необходимо применять общую теорию, разработанную Р. Мизесом в 1923 г. [1-3]. На эффективность применения энергетического метода для оценки устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии указывается в работах [4,5]. В [6,7] приводятся результаты исследования устойчивости стержневой конструкции трубчатой формы, структурообразующими элементами которой являются многогранные кольца, подвергающиеся действию узловых радиальных сил равной величины.

Кольцевые диафрагмы, входящие в состав конструкций сетчатых оболочек в форме однополостного гиперболического параболоида, могут передавать нормальные усилия и в связи с этим при проектировании таких стержневых конструкций необходимо проверять на устойчивость их отдельные конструктивные элементы [8,9].

Рассмотрим, например, случай, когда выделенная конструкция кольцевой диафрагмы представляет собой плоскостную систему, изображенную на рис. 1.

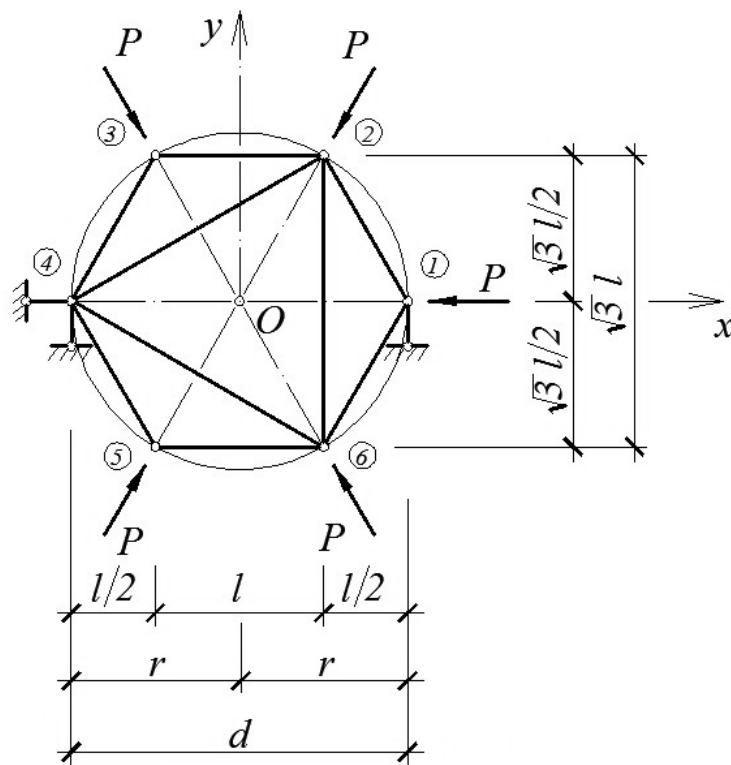


Рис. 1. Стержневая конструкция многоугольного кольца под действием радиальных сил

На шарнирную систему, имеющую внешний контур в форме правильного шестиугольника и внутренний контур в форме правильного треугольника, действуют три пары равных и прямо противоположных сил P . Плоскостная система имеет 6 узлов и 9 стержней. Очевидно, что усилия в стержнях внешнего контура будут P , а во всех стержнях внутреннего контура они равны нулю.

Для произвольного узла k плоскостной системы, в котором сходятся i стержней, уравнения равновесия деформированной конфигурации принимают вид [10]:

$$\sum_i \left\{ \frac{EF}{l} \left[(\delta x_k - \delta x_i) \left(1 - \frac{l}{a} \sin^2 \alpha \right) + (\delta y_k - \delta y_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \beta \right] \right\}_{ik} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_i \left\{ \frac{EF}{l} \left[(\delta x_k - \delta x_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \beta + (\delta y_k - \delta y_i) \left(1 - \frac{l}{a} \sin^2 \beta \right) \right] \right\}_{ik} = 0. \quad (2)$$

Первоначальная длина стержня между любыми двумя узлами i и k здесь считается равной l_{ik} , а длина этого же стержня после деформирования фермы a_{ik} . Компоненты малого смещения узла k являются δx_k , δy_k , а узла i соответственно δx_i , δy_i . Через α_{ik} и β_{ik} обозначены углы между стержнями ik и осями координат x и y .

Покажем далее, что уравнения (1) и (2) при условии $F_1 = \sqrt{3}F$ принимают наиболее простую форму записи, а именно:

$$2\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_1 - \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)(\delta x_2 + \delta x_6) - \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda(\delta y_2 - \delta y_6) = 0, \quad (3)$$

$$-\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_1 + \left(\frac{11}{4} - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \lambda)\delta y_2 - \delta x_3 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \lambda)\delta x_2 + \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{4}\lambda\right)\delta y_2 - (1 - \lambda)\delta y_3 - \delta y_6 = 0, \quad (5)$$

$$-\delta x_2 + \left(2 - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta y_3 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_3 - (1 - \lambda)\delta y_2 + \left(2 - \frac{5}{4}\lambda\right)\delta y_3 = 0, \quad (7)$$

$$\left(2 - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_5 - \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta y_5 - \delta x_6 = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_7 + \left(2 - \frac{5}{4}\lambda\right)\delta y_5 - (1 - \lambda)\delta y_6 = 0, \quad (9)$$

$$-\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_1 - \delta x_5 + \left(\frac{11}{4} - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_6 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \lambda)\delta y_6 = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_1 - \delta y_2 - (1 - \lambda)\delta y_5 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \lambda) + \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{4}\lambda\right)\delta y_6 = 0. \quad (11)$$

Отличные от нуля значения для независимых переменных δx , δy можно получить при этом только в том случае, если детерминант системы девяти уравнений (3)-(11) будет равен нулю.

Приравнивая этот детерминант нулю, запишем характеристический полином девятого порядка относительно параметра $\lambda = l/a$ в виде

$$p_9(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 2)(\lambda - 1)p_4(\lambda) = 0. \quad (12)$$

В свою очередь для $p_4(\lambda)$ имеем

$$p_4(\lambda) = \left(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{10}{3} \right) (47\lambda^2 - 170\lambda + 136) = 0. \quad (13)$$

Решение квадратного уравнения в первых круглых скобках дает

$$\lambda_6 = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \approx 2,186, \quad (14)$$

$$\lambda_7 = 2 \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \approx 0,816. \quad (15)$$

При рассмотрении второго сомножителя в выражении (13) получаем два оставшихся корня $\lambda_8 = 2,423$ и $\lambda_9 = 1,194$.

Из всех 9 найденных таким образом значений параметра λ выбираем только тот из них, при котором система упругих стержней становится неустойчивой. Другими словами, имеем $\lambda_{кр} = 6/5$ и соответствующее значение $P_{кр}$ будет

$$P_{кр} = \frac{1}{6} EF. \quad (16)$$

Интересно, что при числе узлов фермы $n = 6$ критическое значение параметра λ получается таковым:

$$\lambda_{кр} = \frac{n}{n-1}. \quad (17)$$

Скорее всего, этот результат не является случайным, а продиктован свойством циклической симметрии рассмотренной стержневой конструкции. Очевидно, что в последующем целесообразно произвести исследование общей устойчивости стержневых колец в форме правильных многоугольников с четным числом сторон. При этом важно рассмотреть

также вопрос поведения статически неопределимых конструкций колец, находящихся под действием узловых радиальных сил.

Литература

1. Журавлев А.А., Журавлев Д.А. Стержневые конструкции цилиндрических оболочек. Ростов-на-Дону: ЗАО "Книга", 2014. 224 с.
2. Журавлев А.А. Устойчивость упругих стержневых систем в форме выпуклых многогранников // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. №6. С. 42-48.
3. Mises R., Ratzendorfer I. Die Knicksicherheit von Fachwerken. Z. für angewandte Math. und Mech. 1925. ss. 218-231.
4. Литвинов С.В., Языев Б.М. Энергетический метод в форме Тимошенко-Ритца для определения критических сил осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/722.
5. Тимофеев С.И. Численное решение нелинейной задачи устойчивости цилиндрических изотропных оболочек на основе динамического критерия // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/720.
6. Динник А.Н., Гришкова Н.П., Лысков В.П., Пеньков А.М. Расчет башен системы Шухова на прочность и устойчивость // Вестн. инж. и техн. 1933. №7. С. 288-292.
7. Журавлев А.А., Журавлев Д.А. Расчет устойчивости стержневой конструкции многогранной конфигурации // Изв. вузов. Строительство. 2017. №10(706). С. 5-13.
8. Рабинович И.М. Об устойчивости стержней в статически-неопределимых системах. М-Л. 1932. С. 36.

9. Штаерман И.Я., Пиковский А.А. Методы расчета конструкций на устойчивость. Киев. 1938. 207 с.

10. Shurawlow A., Stenker H. Zur von Raumstabkuppeln. Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 26 (1977). H.1. ss. 195-197.

References

1. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A. Sterzhnevye konstrukcii cilindricheskikh obolochek [Rod constructions of cylindrical shells]. Rostov-na-Donu: ZAO "Kniga", 2014. 224 p.

2. Zhuravlev A.A. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 1985. №6. pp. 42-48.

3. Mises R., Ratzerdorfer I. Die Knicksicherheit von Fachwerken. Z. für angewandte Math. und Mech. 1925. ss. 218-231.

4. Litvinov S.V., Yazyev B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/722.

5. Timofeev S.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/720.

6. Dinnik A.N., Grishkova N.P., Lyskov V.P., Pen'kov A.M. Vestn. inzh. i tekhn. 1933. №7. pp. 288-292.

7. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A. Izv. vuzov. Stroitel'stvo. 2017. №10 (706). pp. 5-13.

8. Rabinovich I.M. Ob ustojchivosti sterzhnej v staticheski-neopredelimykh sistemah [On the stability of rods in statically indefinable systems]. M-L. 1932. 36p.

9. Shtaerman I.Ya., Pikovskij A.A. Metody rascheta konstrukcij na ustojchivost' [Methods for calculating the stability of structures]. Kiev. 1938. 207 p.

10. Shurawlow A., Stenker H. Zur von Raumstabkuppeln. Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 26 (1977). H.1. ss. 195-197.
