

Прогнозирование накопления остаточных деформаций в строительных конструкциях

Л.Н. Панасюк, Ю.Ш. Чубка, В.С. Тюрина, А.У-Б. Пошев

*Академия строительства и архитектуры Донского государственного технического
университета, Ростов-на-Дону*

Аннотация: В статье рассмотрен вопрос ползучести в строительной механике. Записаны системы нелинейных разрешающих уравнений для разных видов ядер ползучести. Рассмотрен алгоритм решения задачи нелинейной наследственности.

Ключевые слова: ползучесть, нелинейная наследственность, аппроксимации ядер ползучести, метод конечных элементов, ядра экспоненциального типа, метод наименьших квадратов, узлы коллокации.

Под ползучестью в механике понимается достаточно медленная деформация тела, развивающаяся под воздействием постоянной нагрузки в течение времени. В различной степени ползучесть развивается как в кристаллических, так и в аморфных телах. На скорость ползучести могут оказывать влияние различные дополнительные внешние факторы. Например, на скорость ползучести грунтов большое влияние оказывает их влажность.

В строительной механике одной из наиболее общих теорий описания процессов ползучести является наследственная линейная теория ползучести, называемая также теорией линейной наследственности Больцмана – Вольтера, которая в случае одномерного напряженного состояния записывается в форме (1). В (1) ε – деформация, σ – напряжение, E – мгновенный модуль упругости, $K(t-\tau)$ называется ядром ползучести разностного типа [1, 2].

Практическое использование механических моделей для решения прикладных задач невозможно без достоверной методики определения параметров, входящих в определяющие уравнения. Для наследственных моделей ползучести эти параметры, как правило, входят в структуру ядер наследственности и определяются по результатам обработки простых и легко воспроизводимых экспериментов.

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1)$$

Для описания процессов нелинейной теории наследственности в одномерном случае, предложенной Ю.Н. Работновым [2-3], используется следующее уравнение состояния:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (2)$$

В (2) φ – нелинейная функция связи между напряжениями и деформациями, полученная при мгновенном эксперименте (рис. 1), а ядро K определяется из эксперимента на линейную ползучесть. Значительным достоинством теории Ю.Н. Работнова является с одной стороны, достаточно простой состав экспериментов для определения параметров сложных процессов нелинейной наследственности, с другой – все преимущества теории наследственности по отношению к простым техническим гипотезам ползучести.

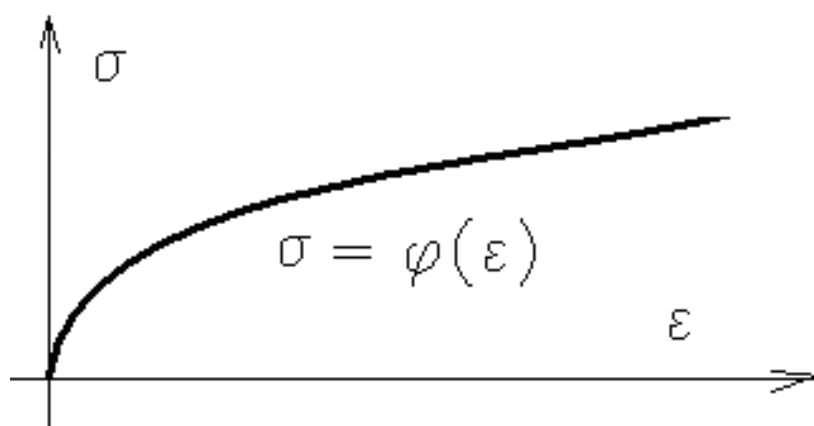


Рисунок 1. Мгновенная диаграмма деформирования материала

Ю.Н. Работновым использовано представление нелинейного функционала в виде ряда кратных интегралов Фреше [4]. В этом

представлении ядра задавались произведением одинаковых функций различных аргументов.

С учетом обозначения (3) получены соотношения (4):

$$\tilde{\sigma} = J_0 * d\sigma = \int_0^t J_0(t-\theta)d\sigma(\theta) = (1+L^*)\sigma \quad (3)$$

$$\varepsilon = a_1\tilde{\sigma} + a_2\tilde{\sigma}^2 + a_3\tilde{\sigma}^3 + \dots \quad (4)$$

Из обращения ряда (4) следует (5).

$$\tilde{\sigma} = (1+L^*)\sigma = \phi(\varepsilon) \quad (5)$$

В (5) под символом $L^*\alpha$ понимается свертка функций L и σ , где L – ядро ползучести. Обозначения в (5): ε – деформации, σ – напряжения одномерной теории наследственности, L^* – интегральный оператор (оператор Вольтерры). При $t=0$ соотношения (5) сводится к зависимости нелинейной теории упругости, где $\phi(\varepsilon)$ задает «мгновенную» диаграмму деформирования материала. В случае линейной зависимости в «быстром» эксперименте при $t=0$ имеем $\tilde{\sigma} = E_0\varepsilon$. При отсутствии эффекта ползучести ($L \equiv 0$) получаем соотношения одномерной нелинейной теории упругости $\sigma = \phi(\varepsilon)$.

Перепишем (4) в виде (6).

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}_c}, \text{ где } \tilde{E}_c = \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon} \quad (6)$$

На основе подхода Ю.Н.Работнова получим альтернативную форму соотношений наследственной упругопластичности. Для этого выполним разложение напряжений в ряд Фреше (7).

$$\sigma = \int_0^t R_1(t-\theta_1)d\varepsilon(\theta_1) + \int_0^t \int_0^t R_2(t-\theta_1, t-\theta_2)d\varepsilon(\theta_1)d\varepsilon(\theta_2) + \dots \quad (7)$$

В (7) также предполагается выполнение гипотезы Ю.Н. Работнова – (8).

$$K_k(t-\theta_1, t-\theta_2, \dots, t-\theta_k) = b_k \prod_{s=1}^k K_0(t-\theta_s) \quad (8)$$

Используя обозначения (9), получаем физические соотношения в виде (10). После обращения (10) получим (11).

$$\varepsilon = R_0 * d\sigma = \int_0^t R_0(t-\theta) d(\theta) = (1 - R^*) \varepsilon \quad (9)$$

$$\sigma = b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (10)$$

$$\varepsilon = (1 - R^*) \varepsilon = f(\sigma) \quad (11)$$

Здесь R – ядро релаксации, ε – модифицированная деформация. Функция $f(\sigma)$ (обратная к $\phi()$) соответствует мгновенной диаграмме деформирования. Действительно, при $t=0$ выполняются соотношения, описывающие одну и ту же диаграмму мгновенного деформирования образца: $\varepsilon = f(\sigma)$, $\sigma = \phi(\varepsilon)$. Выполним переход от (10) к (12).

$$\sigma = \hat{E}_c \varepsilon, \text{ где } \hat{E}_c = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (12)$$

Итак, (4–6) соответствуют прямой форме Ю.Н. Работнова, а (9–11) альтернативной закона наследственной одномерной нелинейной теории упругости [5–7]. Далее ядра L и R будем записывать с индексом «единица» (L_1, R_1) для прямой формы, и с индексом «два» (L_2, R_2) для альтернативной формы.

Альтернативная форма закона позволяет получить разрешающие уравнения для случая сложного НДС, а также конечно-элементную реализацию (13).

$$k_K^{m-1} (1 - R^*) \Delta q^m = \Delta p^m, \in V_{эл} \quad (13)$$

В (23) интегрирование $(1 - R^*) \Delta q$ можно выполнить численно. Например, интегрирование методом трапеций дает:

$$R^* \Delta q^m = \int_0^t R(t-\theta) \Delta q(\theta) d\theta = R(m\Delta t) \Delta q(0) \frac{\Delta t}{2} + \Delta t \sum_{n=2}^{m-1} R(m\Delta t - n\Delta t) \Delta q(n\Delta t) + R(0) \Delta q(m\Delta t)$$

С учетом последнего равенства, уравнения равновесия метода конечных элементов аппроксимируются как (14).

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} R(0)\right) \hat{k}_K^{m-1} \Delta q^m = \Delta p^m + \frac{\Delta t}{2} R(m\Delta t) \hat{k}_K^{m-1} \Delta q^1 + \Delta t \hat{k}_K^{m-1} \sum_{m=2}^{m-1} R((m-n)\Delta t) \Delta q^m \quad (14)$$

Алгоритм решения задачи нелинейной наследственности следующий:

1. Вначале определяются мгновенные компоненты НДС, относящиеся к моменту $t=0$. Здесь на условном бесконечно-малом отрезке времени при $t=0$ вязкие свойства не проявляются, и выполняется решение стационарной задачи.
2. Второй этап выполняется циклически до конечного времени счета. В пределах очередного шага модифицированные деформации, напряжения, модули для текущего момента времени. Строятся локальные матрицы жесткости и формируется глобальная система уравнений МКЭ (14) [8]. Решение этой системы дает вектор приращения модифицированных перемещений.
3. После достижения конечного времени счета выполняется контроль точности шага интегрирования Δt . Для чего проводится сгущение сетки временных конечных элементов (т.е. уменьшение Δt) до стабилизации решения.

Рассмотрена возможность аппроксимации ядер ползучести следующими известными и часто используемыми функциями:

Простейшее ядро Больцмана:

$$K(t - \tau) = \frac{C}{t - \tau}$$

Усложнение ядра Больцмана (ядро Абеля):

$$K(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)^\alpha}$$

Ядро Абеля описывает следующую зависимость при постоянном уровне напряжений:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \frac{C}{1 - \alpha} t^{1-\alpha} \right]$$

Ядро Ю.Н. Работнова:

$$K(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)}, \text{ где } \Gamma() \text{ – гамма-функция.}$$

Ядро Г.М.Слонимского:

$$K(t - \tau) = \frac{C e^{-(t-\tau)^{1-\alpha}}}{(t - \tau)^\alpha}$$

Частный случай этого ядра:

$$K(t - \tau) = \frac{C e^{-\beta(t-\tau)}}{(t - \tau)^\alpha}$$

Приведенные выше ядра были сингулярными, имеющими особенность в нулевой точке по времени.

Часто на практике используются ядра экспоненциального типа, не являющиеся сингулярными. В общем виде:

$$K(t - \tau) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

В частном случае часто используется ядро с одним слагаемым:

$$K(t - \tau) = a e^{-\lambda(t-\tau)}.$$

Выбор того, какое из ядер окажется более «точным» для описания процесса деформирования конкретного материала, заранее сделать невозможно. Поэтому необходимо предусмотреть возможность выбора вида ядра по результатам натуральных экспериментов. Пользователь будет иметь возможность оценить разные аппроксимации ядер. На основе этого анализа им будет самостоятельно сделан выбор в пользу того либо иного ядра ползучести для конкретного материала.

Итак, согласно теории Ю.Н. Работнова, ядро ползучести можно строить на простом эксперименте на линейную ползучесть [9, 10]. Для этого уровень напряжений на образец должен быть сравнительно невысоким. Таким, при котором не будет происходить ощутимого развития нелинейных эффектов, в частности, накопления необратимых деформаций в образце. Определить, при каком уровне воздействий не проявляются нелинейные

эффекты, можно на простом эксперименте на «мгновенное» нагружение образца.

Рассмотрим основную зависимость (1) и выполним эксперимент при постоянном уровне нагрузки $\sigma = const = \sigma_0$. Тогда зависимость (1) (с учетом коммутативности операции сверки $\int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = \int_0^t K(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau$) примет вид (15):

$$E\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[1 + \int_0^t K(\tau)d\tau \right] \quad (15)$$

Или, с учетом того, что $\frac{\sigma_0}{E} = \varepsilon_0$ - мгновенное значение деформации при $t=0$ после приложения нагрузки σ_0 , имеем:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_0^t K(\tau)d\tau \quad (16)$$

Продифференцировав (16) по времени, получим:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} v(t) = \frac{d}{dt} \left[1 + \int_0^t K(\tau)d\tau \right] = K(t). \quad (17)$$

Выражение (17) задает явную связь между ядром ползучести и скоростью ползучести: функция ядра ползучести пропорциональна скорости роста деформаций при ползучести с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{\varepsilon_0}$, где ε_0 - мгновенное значение деформации при $t=0$ после приложения нагрузки σ_0 . Символом $v(t)$ в (17) обозначена скорость нарастания деформаций ползучести.

Выполняется эксперимент на ползучесть при постоянной во времени нагрузке и постоянных влияющих на результат факторах (например, температура для бетонов на органических вяжущих, или влажность для грунта). В результатах сохраняются данные по перемещениям верхней грани образца во времени. Из них несложно получить зависимости для деформаций

образца (с учетом отсутствия перемещений по нижней грани). Необходимо аппроксимировать выражение для скорости ползучести по времени одной из предлагаемых выше функций ползучести.

Для этой аппроксимации в работе используется метод наименьших квадратов.

Скорость ползучести в точке по времени приближается конечно-разностным выражением, в котором учитывается, что величина шага по времени при выполнении эксперимента может изменяться (см. рис. 2).

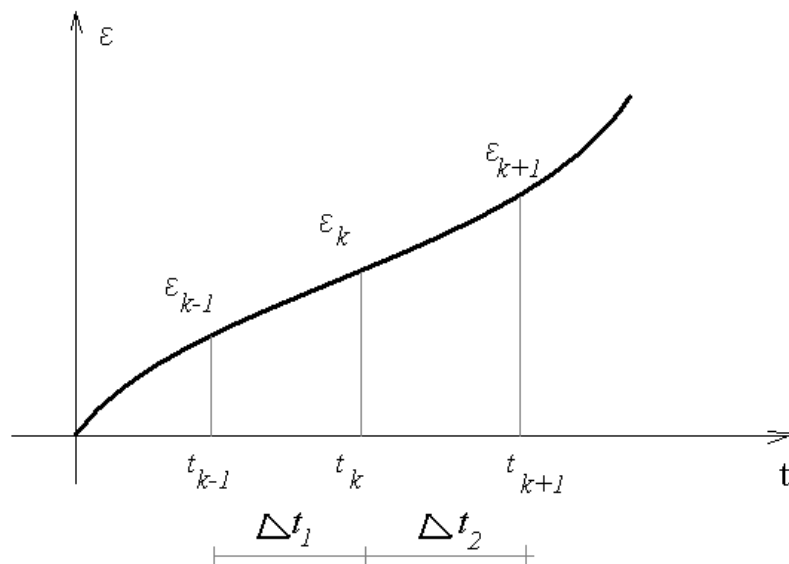


Рисунок 2. Конечно-разностная аппроксимация скорости ползучести

Для построения конечно-разностного выражения для определения скорости ползучести в момент времени t_k участок ползучести на интервале $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ аппроксимирован квадратной параболой с локальным временем в нулевой точке t_k :

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \left[(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 \Delta t_1} + (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} \right] \times t + \left[\varepsilon_{k+1} \frac{1}{\Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} - (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \frac{1}{\Delta t_2 \Delta t_1} \right] \times t^2 \quad (18)$$

Несложно убедиться в выполнении граничных условий в (18):

$$\begin{cases} t = -\Delta t_1, \varepsilon = \varepsilon_{k-1}, \\ t = 0, \varepsilon = \varepsilon_k, \\ t = \Delta t_2, \varepsilon = \varepsilon_{k+1} \end{cases} . \quad (19)$$

В (18) и в (19) t – локальное время с нулем в t_k .

Продифференцируем (18) по времени, получим выражение для скорости деформаций ползучести:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{d\varepsilon}{dt} = & \left[(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 \Delta t_1} + (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} \right] + \\ & 2 * \left[\varepsilon_{k+1} \frac{1}{\Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} - (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \frac{1}{\Delta t_2 \Delta t_1} \right] \times t \end{aligned} \quad (20)$$

Подставим в (20) локальное $t_k=0$ и получим выражение для скорости ползучести в глобальный момент t_k :

$$v_k = v(t_k) = (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 \Delta t_1} + (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2)} \quad (21)$$

Для определения параметров ядер ползучести по результатам лабораторных экспериментов используем МНК (метод наименьших квадратов). Этот математический подход основан на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных. Используется при решении переопределенных систем уравнений, а также для поиска решения нелинейных систем уравнений. В рассматриваемой задаче МНК можно использовать для приближения точечных значений эксперимента некоторой функцией.

Подход МНК записывают следующим образом:

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i (y_i - f_i(x))^2 \rightarrow \min_x$$

В нашем случае имеется n значений некоторой переменной y или соответствующих переменных x . Задача заключается в аппроксимации взаимосвязи между y и x некоторой функцией $f(x, b)$, известной с точностью до определяемых в процессе решения параметров b .

При решении задачи минимизации находим стационарные точки целевой функции, для чего находятся частные производные по неизвестным параметрам b . Система разрешающих уравнений получается после приравнивания производных к нулю:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, b)) \frac{\partial f(x_i, b)}{\partial b} = 0. \quad (22)$$

У нас ядра ползучести не могут быть представлены линейной комбинации базовых функций, и метод наименьших квадратов порождает систему нелинейных уравнений.

Запишем системы нелинейных разрешающих уравнений для разных видов ядер ползучести:

Аппроксимация ядра Абеля

Определяются параметры (C, α) для приближения функции:

$$K(t) = \frac{C}{t^\alpha}.$$

Применяя метод наименьших квадратов, имеем систему нелинейных уравнений (записана после сокращений на константы 2 и -2):

$$\begin{cases} \min_{C, \alpha} \Phi = \sum_i \left(v(t_i) - \frac{C}{t_i^\alpha} \right)^2, \\ \sum_i \left(v(t_i) - \frac{C}{t_i^\alpha} \right) \frac{1}{t_i^{\alpha_i}} = 0, \\ \sum_i \left(v(t_i) - \frac{C}{t_i^\alpha} \right) \frac{C}{t_i^{\alpha_i}} \ln(C) = 0. \end{cases}$$

Аппроксимация экспоненциального ядра с одним членом комбинации

Определяются параметры (C, α) для приближения функции:

$$K(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Применяя метод наименьших квадратов, имеем систему нелинейных уравнений (записана после сокращений на константы $2C$ и $-2C$):

$$\begin{aligned} \min_{C, \alpha} \Phi &= \sum_i (v(t_i) - Ce^{-\lambda t})^2, \\ \left\{ \begin{aligned} \sum_i (v(t_i) - Ce^{-\lambda t}) \cdot e^{-\lambda t_i} &= 0, \\ \sum_i (v(t_i) - Ce^{-\lambda t}) \cdot t_i e^{-\lambda t_i} &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Аппроксимация экспоненциального ядра с несколькими членами комбинации

Пусть используется “ n ” экспоненциальных слагаемых.

Определяется множество параметров ($\{C\}_n, \{\alpha\}_n$) для приближения функции:

$$K(t) = \sum_i C_i e^{-\lambda_i t}.$$

Применяя метод наименьших квадратов, имеем систему $2n$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \min_{C, \alpha} \Phi &= \sum_i \left(v(t_i) - \sum_j C_j e^{-\lambda_j t} \right)^2, \\ \left\{ \begin{aligned} \sum_i \left(v(t_i) - \sum_j C_j e^{-\lambda_j t_i} \right) \cdot \sum_k e^{-\lambda_k t_k} &= 0, \\ \sum_i \left(v(t_i) - \sum_j C_j e^{-\lambda_j t_i} \right) \cdot \sum_k (t_k C_k e^{-\lambda_k t_k}) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (23) \end{aligned}$$

В (22) записывается « n » уравнений первой и второй группы. Например, при использовании двух экспоненциальных слагаемых имеем систему из четырех нелинейных уравнений.

В работе полученные системы нелинейных уравнений решаются в стандартной постановке методом Ньютона. Начальное приближение строится методом коллокаций по наиболее характерным точкам эксперимента. Количество узлов коллокации соответствует числу определяющих параметров для конкретного вида ядра ползучести. Например, для ядра Абеля таких параметров два.

Для каждого типа ядер можно записать свой вид матрицы Якоби, и выполнить аналитическое построение матрицы:

$$W(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^{(k)}) \end{bmatrix}$$

Однако подобная реализация весьма громоздка (достаточно очевидные причины не описываем).

В данной реализации использован алгоритм численного построения матрицы Якоби. При этом частные производные вычисляются по приближенной конечно-разностной аппроксимации:

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + \Delta x, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j - \Delta x, \dots, x_n)}{2\Delta x}$$

Литература

1. Александров А.Ф., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990.-400 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 650 с.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.- 383с.
4. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. Dover Phoenix Editions, 1959. – 304 p.
5. Васильков Г.В., Панасюк Л.Н., Рогачкин П.Л. Вариационные постановки задач наследственной теории течения с изотропным упрочнением //Вычислительная механика и моделирование работы конструкций и сооружений. – Ростов н/Д.: РГАС, 1992. -6с.
6. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1968. – 752 с.
7. Васильков Г.В., Панасюк Л.Н., Селим Ш.И. Деформационная теория пластичности наследственного типа.- Ростов н/Д.: РИСИ, 1991.- 18 с. //Деп. В ВИНТИ N 3792-В9

8. Batht K.-J. Finite Element Procedures. K.-J. Batht .New Jersey: Prentice Hall, 1996. pp. 10-12.

9. Ю.Ш. Чубка, В.С. Тюрина, Л.Н. Панасюк. Решение задач в постановке нелинейной наследственности// Инженерный вестник Дона, 2016, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/ archive/n3y2016/3742

10. В.С. Тюрина, Ю.Ш. Чубка, Л.Н. Панасюк. Моделирование работы подкрепленных оползневых склонов методом конечных элементов// Инженерный вестник Дона, 2016, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3733

References

1. Aleksandrov A.F., Potapov V.D. Osnovy teorii uprugosti I plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. M.: Vysshaya shkola, 1990. 400 p.
2. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruемого tverdogo tela. [Mechanics of deformable solid]. M.: Nauka, 1979. 650 p.
3. Rabotnov Ju.N. Jelementy nasledstvennoj mehaniki tverdyh tel. [Elements of hereditary mechanics of solids]. M.: Nauka, 1977. 383 p
4. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. Dover Phoenix Editions, 1959. 304 p.
5. Vasil'kov G.V., Panasjuk L.N., Rogachkin P.L. Variacionnye postanovki zadach nasledstvennoj teorii techenija s izotropnym uprochneniem. Vychislitel'naja mehanika i modelirovanie raboty konstrukcij i sooruzhenij. [Variation tasking hereditary flow theory with isotropic hardening. Computational mechanics and modeling of structures and buildings]. Rostov n.D.: RGAS, 1992. 6 p.
6. Rabotnov Ju.N. Polzuchest' jelementov konstrukcij. [Creep of Structural Elements]. M.: Nauka, 1968. 752 p.



7. Vasil'kov G.V., Panasjuk L.N., Selim Sh.I. Deformacionnaja teorija plastichnosti nasledstvennogo tipa. [Deformation theory of hereditary type of plasticity]. Rostov n.D.: RISI, 1991. 18 p. Dep. V. VINITI N 3792-V91
8. Batht K.J. Finite Element Procedures. K.J. Baths. New Jersey: Prentice Hall, 1996. pp. 10.12.
9. Ju.Sh. Chubka, V.S. Tyurina, L.N. Panasjuk. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3742
10. V.S. Tyurina, Ju.Sh. Chubka, L.N. Panasjuk. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3733