

## Численное моделирование динамической задачи взаимодействия сооружения с основанием

С. Х. Суфиев

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Национальной академии наук Таджикистана (НАНТ)*

**Аннотация:** В статье рассматривается численное решение динамической задачи взаимодействия здания с основанием. Разработанный алгоритм и компьютерная программа реализованы на примере расчета 9-этажного каркасного здания с учетом работы буронабивных свай от воздействия в виде заданной акселерограммы землетрясения.

**Ключевые слова:** численное моделирование, коренная порода, акселерограмма, сплайн аппроксимация, буронабивные сваи, парциальные частоты, шаг интегрирования.

**Введение.** Динамическое взаимодействие сооружения с грунтом основания является одной из основных задач в теории сейсмостойкости зданий и сооружений. Предполагается, что на глубине  $h$  от земной поверхности расположены коренные породы, куда прикладывается сейсмическое воздействие в виде заданной акселерограммы землетрясения.

Следует отметить, что применение метода конечных элементов и программных комплексов к численному моделированию этой задачи осложнено рядом факторов. Эти факторы связаны с длительностью сейсмического воздействия и рассмотрением области грунта, которая должна иметь достаточные размеры. Это объясняется тем, что в процессе сейсмического воздействия отражение волн от границ расчетной области не должно оказывать влияние на результаты решения [1]. Различные аспекты задачи о взаимодействия сооружения с основанием рассмотрены в работах [2-4].

Реакция сооружения на сейсмические воздействия зависит от взаимодействия между взаимосвязанными элементами системы «грунт-фундамент-сооружение». Для сооружения с жестким фундаментом,

опирающегося на скальное основание, проблема взаимодействия отсутствует.

**Дифференциальные уравнения.** Из рассмотрения системы с двумя степенями свободы (рис.1,а,б), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{w}_0 + \ddot{w}_1) + r_{11}w_1 + r_{12}w_2 &= 0, \\ m_2(\ddot{w}_2 + \ddot{w}_0) + r_{21}w_1 + r_{22}w_2 &= 0, \end{aligned}$$

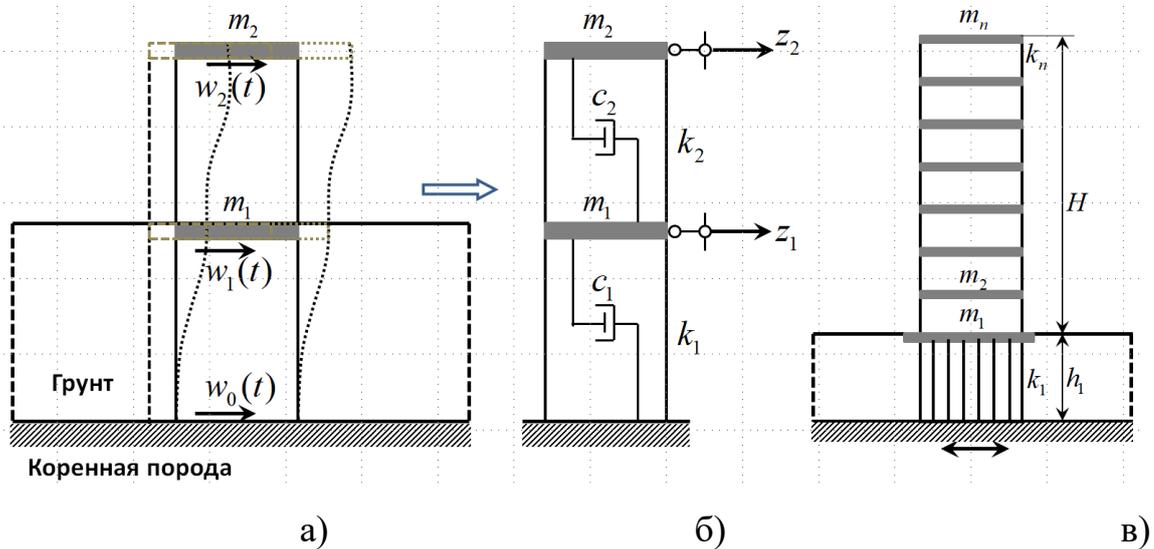
где единичные реакции метода перемещений выражаются через коэффициенты жесткости стержней:

$$r_{11} = k_1 + k_2, \quad r_{12} = -k_2, \quad r_{21} = r_{12} = -k_2, \quad r_{22} = k_2,$$

заменив их, получим:

$$m_1\ddot{w}_1 + (k_1 + k_2)w_1 - k_2w_2 = -m_1\ddot{w}_0, \quad \rightarrow \quad m_1\ddot{w}_1 + k_1w_1 - k_2(w_2 - w_1) = -m_1\ddot{w}_0, \quad (1)$$

$$m_2\ddot{w}_2 - k_2w_1 + k_2w_2 = -m_2\ddot{w}_0, \quad \rightarrow \quad m_2\ddot{w}_2 + k_2(w_2 - w_1) = -m_2\ddot{w}_0, \quad (2)$$



**Рис.1.** Модель взаимодействия сооружения с основанием

Уравнения (1) и (2) с учетом затухания, согласно гипотезе Фохта [5], представляются в виде:

$$m_1\ddot{w}_1 + c_1\dot{w}_1 + (k_1 + k_2)w_1 - k_2w_2 = -m_1\ddot{w}_0, \quad (3)$$

$$m_2\ddot{w}_2 + c_2\dot{w}_2 - k_2w_1 + k_2w_2 = -m_2\ddot{w}_0. \quad (4)$$

Если предположить, что исследуемая модель состоит из  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  сосредоточенных масс (рис. 1, в), то по аналогии (3) и (4) получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{w}_1 + c_1 \dot{w}_1 + (k_1 + k_2)w_1 - k_2 w_2 &= -m_1 \ddot{w}_0(t), \\ m_2 \ddot{w}_2 + c_2 \dot{w}_2 - k_2 w_1 + (k_2 + k_3)w_2 - k_3 w_3 &= -m_2 \ddot{w}_0(t), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ m_{n-1} \ddot{w}_{n-1} + c_{n-1} \dot{w}_{n-1} - k_{n-1} w_{n-2} + (k_{n-1} + k_n)w_{n-1} - k_n w_n &= -m_{n-1} \ddot{w}_0(t), \\ m_n \ddot{w}_n + c_n \dot{w}_n - k_n w_{n-1} + k_n w_n &= -m_n \ddot{w}_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Систему уравнений (5) можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}\mathbf{W} = -\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{w}_0(t), \quad (6)$$

где  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  – матрицы масс, затухания и жесткости,  $\ddot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{W}}, \mathbf{W}$  – векторы ускорений, скоростей и перемещений,  $\ddot{w}_0(t)$  – заданная функция акселерограммы землетрясения,

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1 \ m_2 \ m_3 \ \dots \ m_n), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_n),$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \dots & & & \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \dots \\ \ddot{w}_n \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dots \\ \dot{w}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Свободные колебания без учета затухания описывается системой однородных уравнений:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7), соответствующее гармоническим колебаниям с частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi$ , имеет вид:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{A} \sin(\omega t + \varphi), \quad (8)$$

где  $\mathbf{A}$  – вектор – столбец амплитуд колебаний. Частота  $\omega$  и вектор  $\mathbf{A}$  удовлетворяют уравнению:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

эквивалентное системе  $n$  линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонентов вектора  $\mathbf{A}$ . Условие существования ненулевого решения однородной системы уравнений (9) приводит к характеристическому уравнению:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (10)$$

Раскрывая определитель (10), получим уравнение  $n$ -й степени относительно  $\omega^2$ , в результате решения которого получим собственные частоты свободных колебаний исследуемого объекта. Например, для системы с двумя степенями свободы (рис.1,б) уравнение (10) примет вид:

$$\begin{vmatrix} (r_{11} - \omega^2 m_1) & r_{12} \\ r_{21} & (r_{22} - \omega^2 m_2) \end{vmatrix} = 0,$$

раскрывая которое, получим квадратное уравнение:

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0,$$

$$\lambda = \omega^2, \quad a = m_1 m_2, \quad b = m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2), \quad c = k_1 k_2,$$

откуда при заданных значениях  $m_1, m_2, k_1, k_2$  определяются  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а затем частоты колебаний. При этом парциальные частоты будут равны:

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}.$$

**Численное моделирование.** С применением методов сплайн-аппроксимации [6-8], векторы скоростей и ускорений, соответствующие моменту времени  $t_n$ , представляются в виде:

$$\ddot{\mathbf{W}}_n = \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} (\mathbf{W}_n - \mathbf{W}_{n-1}) - \frac{\alpha_2}{\tau_n} \dot{\mathbf{W}}_{n-1} - \alpha_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}, \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_n = \frac{\beta_1}{\tau_n} (\mathbf{W}_n - \mathbf{W}_{n-1}) - \beta_2 \dot{\mathbf{W}}_{n-1} - \tau_n \beta_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}, \quad (12)$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь:  $\mathbf{W}_{n-1}, \dot{\mathbf{W}}_{n-1}, \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}$  – векторы перемещений, скоростей и ускорений, соответствующие моменту времени  $t_{n-1}$ ,  $\mathbf{W}_n, \dot{\mathbf{W}}_n, \ddot{\mathbf{W}}_n$  – тоже соответствуют моменту времени  $t_n$ ,  $\tau_n$  – шаг интегрирования на отрезке времени  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $\alpha_j, \beta_j$  – коэффициенты, которые зависят от способа аппроксимации. Например, если на отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$  первую и вторую производные искомой функции последовательно аппроксимировать многочленом первой степени [8], то эти коэффициенты будут равны:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 1; \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0,$$

а при аппроксимации  $w(t)$  на отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$  кубической параболой:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 2; \quad \beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 0,5.$$

Внося (11) и (12) в (6), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{M} + \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{W}_n = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}_{0,n}(t) + \\ & + \mathbf{M} \left( \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{W}_{n-1} + \frac{\alpha_2}{\tau_n} \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + \alpha_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1} \right) + \mathbf{C} \left( \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{W}_{n-1} + \beta_2 \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + \tau_n \beta_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1} \right), \quad (13) \\ & n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{A}_{n-1} = \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{W}_{n-1} + \frac{\alpha_2}{\tau_n} \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + \alpha_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_{n-1} = \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{W}_{n-1} + \beta_2 \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + \tau_n \beta_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}, \quad (15)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{M} + \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{C} + \mathbf{K}, \quad (16)$$

и уравнение (13) представим в виде:

$$\mathbf{R} \mathbf{W}_n = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}_{0,n}(t) + \mathbf{M} \mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{C} \mathbf{V}_{n-1}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{R}$  – матрица обобщенной жесткости,  $\mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{V}_{n-1}$  – векторы ускорений и скоростей, соответствующие моменту времени  $t_{n-1}$ . Уравнение (14) можно представить в окончательном виде:

$$\mathbf{R}\mathbf{W}_n = \mathbf{F}_n, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_n = -\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}}_{0,n} + \mathbf{M}\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{C}\mathbf{V}_{n-1}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{F}_n$  – вектор обобщенной динамической нагрузки, который состоит из суммы трех векторов: сейсмических, инерционных и сил затухания.

**Реализация алгоритма.** На первом шаге по времени ( $n=1$ ), с учетом начальных условий, формируются векторы (14), (15) и (18), а затем, исходя из решения системы алгебраических уравнений (15) определяется вектор перемещений  $\mathbf{w}_1$ . На следующем шаге ( $n=2$ ) из (11) и (12) определяются векторы скоростей  $\dot{\mathbf{w}}_2$  и ускорений  $\ddot{\mathbf{w}}_2$ , а затем формируются векторы  $\mathbf{A}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{F}_2$ , и из решения (17) определяется вектор  $\mathbf{W}_2$ .

Далее вычислительный процесс последовательно повторяется до момента времени  $t_N$ , соответствующего продолжительности действия заданной акселерограммы. Выбор шага интегрирования  $\tau_n$  зависит от шага оцифровки акселерограммы. При этом предполагается, что основной период свободных колебаний исследуемого объекта значительно больше, чем шаг оцифровки.

На основе изложенного алгоритма разработана компьютерная программа **BCO-1-EI Centro** на языке Фортран и получены результаты численного моделирования исследуемого объекта.

**Пример.** Рассматривается 9-этажное каркасное здание размерами в плане  $36 \times 18$  м, сеткой колонн  $6 \times 6$  м, высота этажа  $h = 3$  м (рис.2,а). Сечение колонн –  $0,5 \times 0,5$  м, сечение ригелей –  $0,3 \times 0,45$  м, толщина плит –  $0,2$  м. Общая масса суперструктуры составляет  $564,35$  тс<sup>2</sup>/м:

$m_2 = m_3 = \dots = m_9 = 51,79 \text{ тс}^2/\text{м}$ ,  $m_{10} = 42,12 \text{ тс}^2/\text{м}$ . Предполагается, что фундамент здания опирается на 28 буронабивных свай круглого сечения  $d = 0,5$ , которые, в свою очередь, опираются на плотный грунт или скальное основание, достигая проектной глубины (рис.2,б). Буронабивные сваи с армированным каркасом передают нагрузку не только на тот слой грунта, на который опираются, но и по всей боковой поверхности.

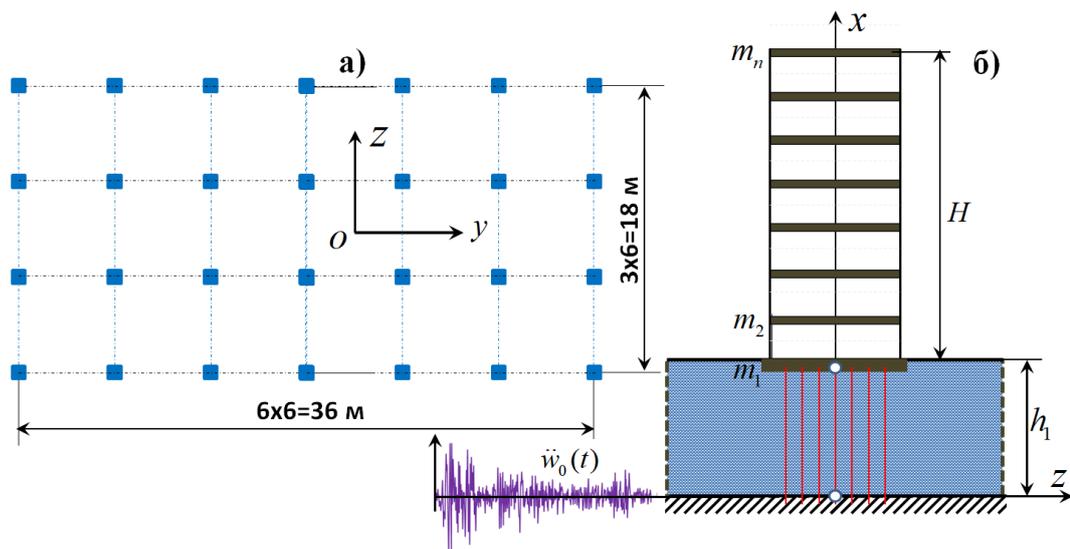


Рис.2. Модель взаимодействия сооружения с основанием

На рис.3 показаны полученные графики изменения горизонтальных перемещений массы  $m_1$  и  $m_{10}$  во времени от сейсмического воздействия в виде заданной акселерограммы на урне коренных пород, расположенных на глубине  $h_1 = 20$  м от земной поверхности (рис.2,б). На рис.4 представлены графики изменения опрокидывающего момента и перерезывающей силы, соответствующие опорной части расчетной модели. Результаты получены при шаге интегрирования  $\tau_n = 0,001$  с на отрезке времени 8 секунд, хотя продолжительность акселерограммы более 30 секунд. На отрезок времени от нуля до восьми секунд приходятся пиковые значения ускорения землетрясений. При этом, максимальное перемещение массы  $m_{10}$  получается более 20-ти сантиметров.



Рис.3. Графики колебания массы здания от заданной акселерограммы El Centro

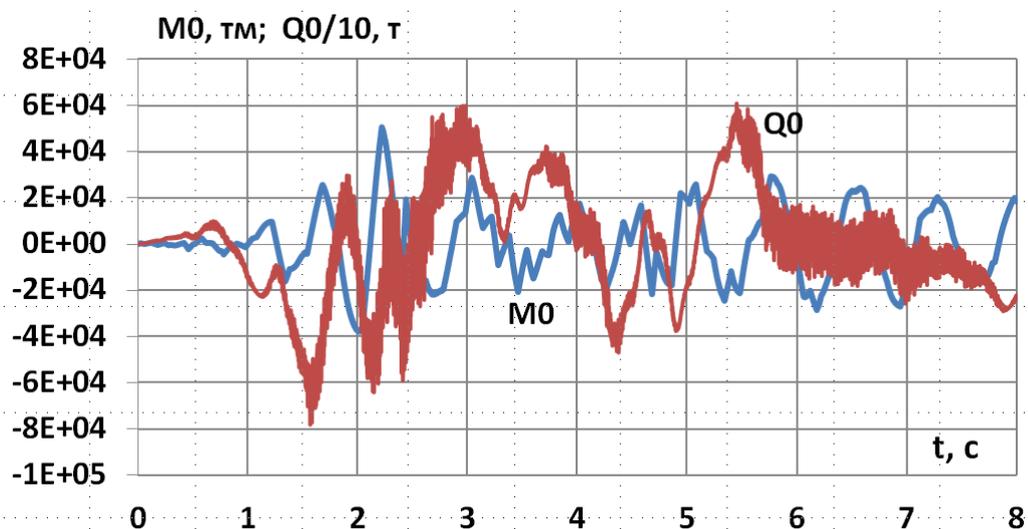


Рис.4. Опрокидывающий момент и перерезывающая сила в опорной части модели

**Вывод.** Предлагаются математические модели, которые описывают упрощенные модели задачи взаимодействия сооружения с основанием. В результате проведенных аппроксимаций по времени, получены системы алгебраических уравнений, которые на каждом шаге по времени решаются итерационным методом Зейделя. Разработанные алгоритмы и компьютерные программы могут быть использованы на стадии вариантного проектирования зданий и сооружений, взаимодействующих с основанием.

## Литература

1. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Лаптев П.В., Дюкина Н.С. Численное моделирование задач взаимодействия сооружений с двухслойным грунтовым основанием при сейсмических воздействиях // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. - вып. 67, 2005, с.162-167.
2. Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г.А., Бусалова М.С. Моделирование взаимодействия сооружения с основанием при расчете на землетрясение // Вестник МГСУ, 2013, №12, с. 34-40.
3. Kramer, S.L. Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, Upper Saddle River. New Jersey 1996, pp. 07458- 672.
4. Forcellini D. A novel framework to assess soil structure interaction (SSI) effects with equivalent fixed-based models. Applied Sciences. 2021 11(21). P. 10472.
5. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.
6. Низомов Д.Н. Методы прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения дискретных систем Сб. науч. тр. ТТУ: «Строительство и архитектура». Вып. 2 –Душанбе,ТТУ, 1992- с. 39-46.
7. Низомов Д.Н. Численное решение динамической задачи мембраны на основе метода граничных элементов при линейной аппроксимации ускорения. - Труды ТТУ. Серия: «Строительство и архитектура» –Вып. 3. –Душанбе, ТТУ, 1993- с. 7-12.
8. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов. (АСВ), 2000. - 282с.

## References

1. Bazhenov V.G., Zefirov S.V., Laptev P.V., Dyukina N.S. Problemy prochnosti i plastichnosti: mezhvuz. sb. vyp. 67, 2005, pp.162-167.
2. Mkrtychev O.V., Dzhinchvelashvili G.A., Busalova M.S. Vestnik MGSU, 2013, №12, pp. 34-40.
3. Kramer, S.L. Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, Upper Saddle River. New Jersey 1996, pp. 07458- 672.
4. Forcellini D. A novel framework to assess soil structure interaction (SSI) effects with equivalent fixed-based models. Applied Sciences. 2021 11(21). P. 10472.
5. Klaf R., Penzien Dzh. Dinamika sooruzhenij. [Dynamics of constructions]. M.: Strojizdat, 1979. 320 p.
6. Nizomov D.N. Sb. nauch. tr. TTU: «Stroitel'stvo i arhitektura». Vyp. 2. Dushanbe, TTU, 1992. pp. 39-46.
7. Nizomov D.N. Chislennoe reshenie dinamicheskoy zadachi membrany na osnove metoda granichnyh elementov pri linejnoj approksimacii uskoreniya. Trudy TTU. Seriya: «Stroitel'stvo i arhitektura» Vyp. 3. Dushanbe, TTU, 1993. pp. 7-12.
8. Nizomov D.N. Metod granichnyh uravnenij v reshenii staticheskikh i dinamicheskikh zadach [The method of boundary equations in the solution of static and dynamic problems]. M.: Izd-vo Associacii stroitel'nyh vuzov. (ASV), 2000. 282p.

**Дата поступления: 6.12.2024**

**Дата публикации: 12.01.2025**