

Численное исследование соотношений теории конечных поворотов

Э.Н. Егерова, А.А. Кряквина

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация: В работе рассматривается вывод основных соотношений теории конечных поворотов. Проведено численное исследование зависимости направляющего косинуса конечного поворота от направляющих косинусов неподвижной системы координат и системы координат, связанной с твердым телом. Получены формулы для косинусов угла конечного поворота. Разработана программа вычисления значений направляющих косинусов конечного поворота от величин, входящих в условие задачи. Построен график зависимости направляющего косинуса конечного поворота от синуса угла конечного поворота. Данная зависимость наглядно выводится при запуске программы.

Ключевые слова: Ориентация вектора в пространстве, сферическая тригонометрия, конечный угол поворота, направляющий косинус, углы Эйлера, конечный поворот.

Введение

Основные соотношения теории конечных поворотов представляют интерес и актуальность для различных областей, например, при построении схемы молекул в биологии, также в военных установках систем наведения, установлении морского судна при крене, при решении прикладных задач 3D моделирования или в управлении движением летательного аппарата в бортовой системе и др.

В работе [1] использовался иной вывод формул для вычисления угла конечного поворота и его направляющих косинусов, чем в данной работе. Автор статьи [2] рассматривает возможности использования инерциальных датчиков низкого и среднего класса точности в системах автоматического управления полетом летательного аппарата с поправкой на углы конечного поворота, применяя соотношения теорию конечных поворотов. Рассматриваемая теория конечных поворотов имеет также широкую сферу применения в многочисленных аспектах проектирования, моделирования и др. Исследование [3] посвящено вопросам алгоритмов функционирования подсистемы управления, входящей в состав бортовой интегрированной системы управления летательным аппаратом и используемой на

заключительном участке траектории движения. Метод взаимного ориентирования аэроснимков, менее всего подверженный корреляционным связям между ошибками в угловых элементах, вызванными погрешностями измерений соответственных прямоугольных координат точек стереопары, изучен в статье [4]. Ключевые особенности современной автономной навигации, где также используются формулы для нахождения конечного угла поворота, рассмотрены в [5]. В статье [6] разработаны и проанализированы уравнения инерциальной навигации для наземных навигационных систем с помощью направляющих косинусов. В статье [7] изучена методика построения алгоритма баллистико-навигационного проектирования перспективной космической навигационной системы на основании вычислений угла конечного поворота. Автор работы [8] представил вниманию краткую теорию управления обратной связью, динамических моделей, динамического отклика, основных свойств обратной связи, метода проектирования частотной характеристики, проектирования пространства состояний, цифрового управления и проектирования системы управления с вычислением соответствующих направляющих косинусов конечного поворота динамической установки.

Вывод основных соотношений теории конечных поворотов

Пусть твёрдое тело движется вокруг неподвижной точки S . Введём неподвижную систему координат $Sxyz$ и подвижную систему координат $Sx_1y_1z_1$, связанную с движущимся твёрдым телом. Для удобства занесем косинусы соответствующих углов с введенными осями неподвижной и подвижной системы координат в таблицу №1, а также введем соответствующие обозначения для краткости записи направляющих косинусов в дальнейшем.

Таблица №1

Матрица направляющих косинусов

Оси координат	x	y	z
x ₁	$\cos(x_1,x)=a$	$\cos(x_1,y)=b$	$\cos(x_1,z)=c$
y ₁	$\cos(y_1,x)=d$	$\cos(y_1,y)=e$	$\cos(y_1,z)=f$
z ₁	$\cos(z_1,x)=g$	$\cos(z_1,y)=h$	$\cos(z_1,z)=i$

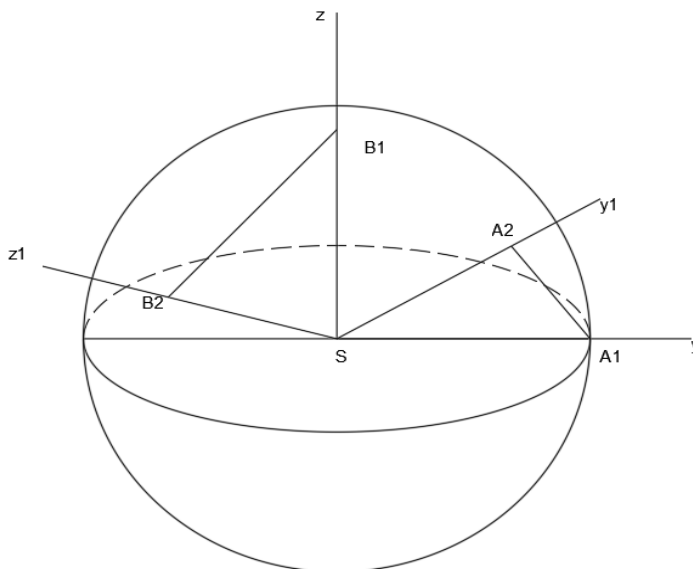


Рис. 1. – Сферическое движение тела относительно точки S.

В начальном положении подвижная система координат совпадает с неподвижной. Затем она меняет свое положение относительно неподвижной системы координат в соответствии с таблицей направляющих косинусов.

По первой сферической теореме косинусов для сферического треугольника [9,10] установим соотношение:

$$\cos x \sin \alpha \sin \beta = \cos y - \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

Тогда, если принять направляющие косинусы в виде:

$$\cos y = a; \quad \cos \alpha = l; \quad \cos \beta = l \quad (2)$$

При подстановке (2) в теорему (1) получим:

$$(1-l)^2 \cos x = a - l^2$$

Следовательно

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Формула для косинуса конечного поворота записывается в виде:

$$\cos x = (a + e + i - 1) / 2$$

Формулы Ишлинского имеют вид [1]

$$l = (f - h) / (2 * \sin(x)); m = (g - c) / (2 * \sin(x)); n = (b - d) / (2 * \sin(x)) \quad (3)$$

Численное исследование полученных результатов. Программа

Вычислим значения направляющих косинусов конечного поворота с помощью программы MATLAB, а также построим график зависимости направляющих косинусов конечного поворота, введенных в таблице №1, от синуса угла конечного поворота, который позволит ориентацию оси конечного поворота.

Программа построения зависимости трех направляющих косинусов конечного поворота от синуса угла конечного поворота, позволяющая ориентировать ось конечного поворота имеет вид:

```
A=input('Введите матрицу направляющих косинусов, A=');
B=input('a=A(1,1); b=A(1,2); c=A(1,3); d=A(2,1); e=A(2,2); f=A(2,3); g=A(3,1);
        h=A(3,2); i=A(3,3)');
C=input('sqrt((A(1,1)-cos(x))/(1-cos(x)))=(f-h)/(2*sin(x)); sqrt((A(2,2)-
cos(x))/(1-cos(x)))=(g-c)/(2*sin(x)); sqrt((A(3,3)-cos(x))/(1-cos(x)))=(b-
d)/(2*sin(x))');
cos(x)=0.5*(A(1,1)+A(2,2)+A(3,3)-1);
x=acos(0.5*(A(1,1)+A(2,2)+A(3,3)-1));
l=sqrt((A(1,1)-cos(x))/(1-cos(x)));
m=sqrt((A(2,2)-cos(x))/(1-cos(x)));
n=sqrt((A(3,3)-cos(x))/(1-cos(x)));
```

```
fprintf('\n Исходная матрица направляющих косинусов\n');  
    fprintf('% 6.2f',A);  
    fprintf('\n косинус угла конечного поворота\n');  
    fprintf('% 6.2f', cos(x));  
    fprintf('\n Направляющие косинусы конечного поворота\n');  
    disp('l=');disp('l');  
    disp('m=');disp('m');  
    disp('n=');disp('n');  
    if l^2+m^2+n^2=1  
disp('Значения направляющих косинусов найдены правильно для конечного  
    поворота  $\theta$ );  
    else  
disp('Значения направляющих косинусов найдены неправильно');  
    end  
    x=0:pi/12:2*pi;  
    l=(A(2,3)- A(3,2))/(2*sin (x));  
    plot(x,l)  
    xlabel(' Угол конечного поворота x');  
    lable('Один из направляющих косинусов l');  
    grid on
```

Основные результаты

Отметим, что при x равном π , значения косинуса угла конечного поворота l существовать не может, так как знаменатель первой дроби (3) обратится в 0. Следовательно, $x=\pi$ – эта прямая является асимптотой для зависимости направляющего косинуса от синуса угла конечного поворота.

Аналогичным образом ведут себя графики зависимостей направляющих косинусов m и n из формул (3), поэтому они здесь не приводятся.

При построении зависимости направляющего косинуса l от синуса угла конечного поворота рассматриваем следующие значения:

$f-h=0,2; 0,4; 0,6$. На графике кривые обозначены номерами 1, 2, 3, соответственно. Из графика видно, что при увеличении $f-h$ направляющий косинус при фиксированном значении x увеличивается.

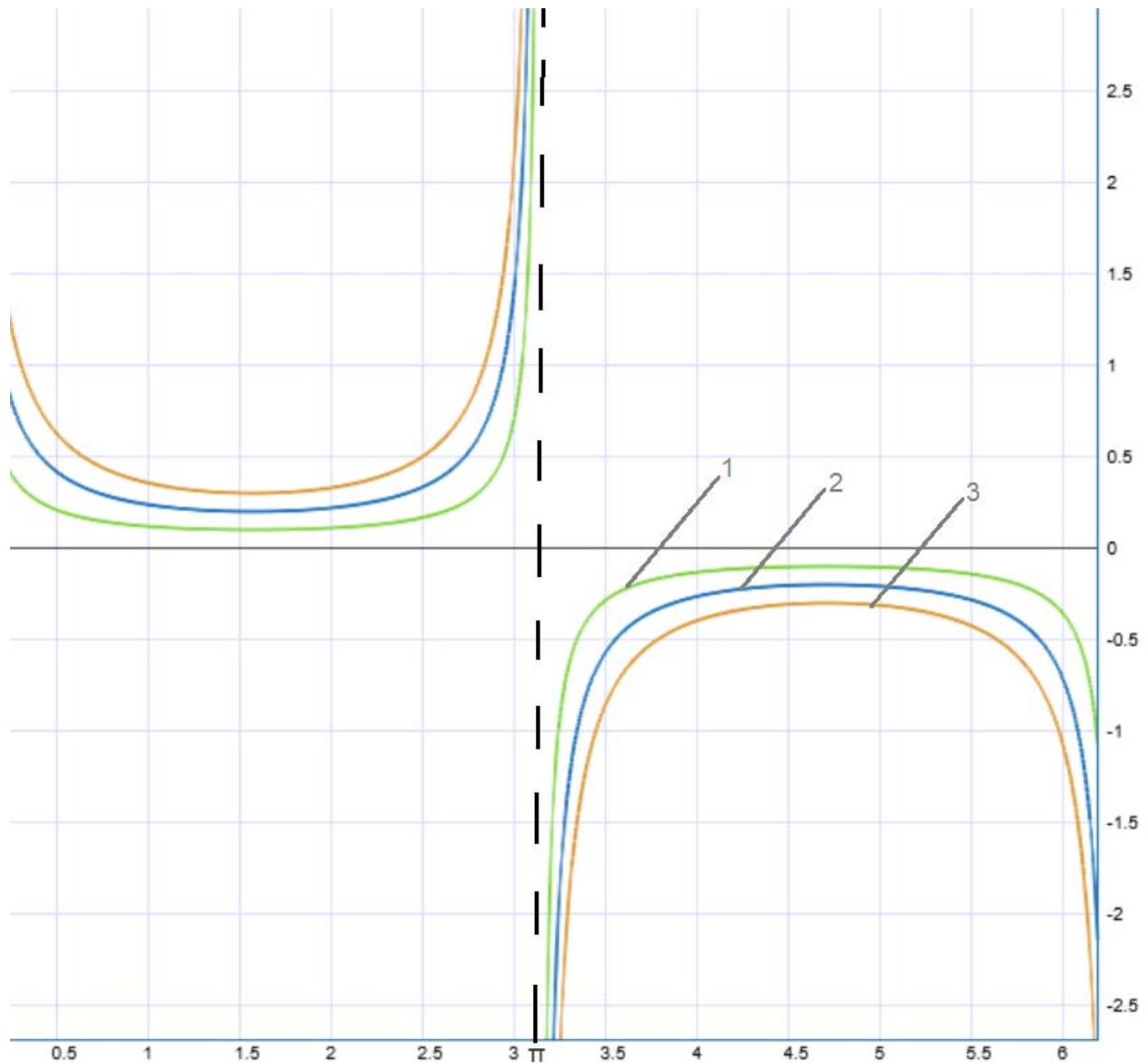


Рис. 2. — Зависимости направляющего косинуса конечного поворота от синуса угла конечного поворота.

Заметим, что при любых $x \in (0; \pi/2)$ значение l будет уменьшаться с увеличением аргумента x , но при $x \in (\pi/2; \pi)$ значение l будет увеличиваться

с увеличением аргумента x . Значения l не будет существовать при $x=\pi$, так как $\sin(\pi)=0$.

Литература

1. Ишлинский Ю.А. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: «Наука», 1976. – 672 с.
2. Хацько Н.Е. О возможности использования инерциальных датчиков низкого и среднего класса точности в системах автоматического управления полетом летательного аппарата// Инженерный вестник Дона, 2013, №3 // URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1756
3. Хусаинов Н.Ш., Кравченко П.П., Салов В.В. Об исследовании бортовой интегрированной системы управления движением летательного аппарата с коррекцией координат// Инженерный вестник Дона, 2013, №4 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2038
4. Добрынин Н.Ф., Пимшина Т.М. Взаимное ориентирование снимков с новым сочетанием угловых элементов// Инженерный вестник Дона, 2015, №3 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3092
5. Пешехонов В.Г. Ключевые особенности современной автономной навигации // Гироскопия и навигация. – 1996. - № 1 (12). С. 48-55
6. Braslavets R.I. Methodology of constructing the algorithm for ballistic-navigation design of an advanced space navigation system. Cosmic Research. 2003. V. 41. № 2. pp. 193-203.
7. Wang L. Formulation and analysis inertial navigation equations for terrestrial navigation systems. - 1997. pp. 8-28.
8. Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naeini, A. Feedback Control of Dynamic Systems (6th Edition). – Prentice Hall, 2009. – P. 840.
9. Кранц П.П. Сферическая тригонометрия. «ЛКИ», 2007. – 98 с.
10. Жуковский Н.Е. Аналитическая механика. «Directmedia», 2014. – 262с.



References

1. Ishlinskij Yu.A. Orientaciya, giroskopy` i inercial`naya navigaciya. [Orientation, gyros and inertial navigation]. M.: «Nauka», 1976. 672 p.
2. Хач`ко N.E. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №3. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1756
3. Xusainov N.Sh., Kravchenko P.P., Salov V.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №4. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2038
4. Dobry`nin N.F., Pimshina T.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №3. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3092
5. Peshexonov V.G. Giroskopiya i navigaciya. 1996. № 1 (12). pp. 48-55.
6. Braslavets R.I. Cosmic Research. 2003. T. 41. № 2. pp. 193-203.
7. Wang L. Formulation and analysis inertial navigation equations for terrestrial navigation systems. 1997. pp. 8-28
8. Franklin, G.F., Powell, J.D., Emami-Naeini, A. Feedback Control of Dynamic Systems (6th Edition). Prentice Hall, 2009. P. 840.
9. Krancz P.P. Sfericheskaya trigonometriya. [Spherical Trigonometry]. «LKI», 2007. 98 p.
10. Zhukovskij N.E. Analiticheskaya mexanika [Analytical Mechanics]. «Directmedia», 2014. 262p.