

## Зависимость текущего такта измерения при адаптивной временной дискретизации в случае восстановления сигнала интерполяционным полиномом нулевой степени

Г.И. Ткаченко<sup>1</sup>, М.Г. Ткаченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>ООО НПКФ «Медиком МТД», Таганрог

**Аннотация:** Эффективность алгоритмов адаптивной временной дискретизации (АВД) определяется коэффициентом сжатия аналогового сигнала. В целях априорной оценки сжимаемости измерительных сигналов рассматривается зависимость текущего такта измерения при АВД от динамических свойств сигнала. На основании полученной ранее зависимости текущего такта измерения от динамических свойств сигнала, получены формулы для оценки величины такта измерения при интерполяции полиномом Лагранжа 0-й степени и класса сигналов, ограниченных выбранной структурной моделью. Функциональная зависимость текущего такта измерения от структурных свойств сигнала, в случае полинома Лагранжа 0-й степени, позволяет определять среднюю длительность такта измерения при АВД. Величина средней длительности такта измерения при АВД позволяет априори оценить величину коэффициента сжатия. В качестве оценки погрешности аппроксимации выбран, часто используемый при восстановлении сигналов, критерий равномерного приближения.

**Ключевые слова:** Адаптивная временная дискретизация, такт измерения, структурные свойства сигнала, интерполяция, полином Лагранжа, погрешность воспроизведения.

Для сокращения объема передаваемой по каналу связи измерительной информации на этапе аналого-цифрового преобразования аналоговых сигналов часто используется адаптивная временная дискретизация (АВД) [1–4]. Эффективность применения алгоритмов АВД по сравнению с равномерной временной дискретизацией (РВД) [3, 5] в цифровых информационно-измерительных системах определяется коэффициентом сокращения числа отсчетов (сжатия), который зависит как от вида аппроксимации и критерия приближения, так и от динамических свойств аналогового сигнала измерительной информации. При выбранном способе аппроксимации величина сжатия посредством АВД в основном зависит от сжимаемости сигнала, т.е. от его способности как материала к сжатию.

В предыдущих статьях [4, 6, 7] получены зависимости величины текущего такта измерения от динамических свойств сигнала. На основании этих зависимостей получены формулы, связывающие величину такта измерения при АД с динамическими характеристиками сигналов при использовании для восстановления сигналов экстраполяционных полиномов 0-вой и 1-вой степени. Получены также зависимости текущего такта измерения  $\tau$  от динамических характеристик сигналов для интерполяционного полинома  $n$ -ой степени. Приведем эти соотношения:

$$\begin{aligned} x_n^{(2)}\tau^2 + 2 \cdot x_n^{(1)}\tau - 2\delta_0/a_0 = 0 \quad \text{при } n = 0, \delta_m > 0; \\ n \cdot x_n^{(n+2)}\tau^{n+2} + 2 \cdot x_n^{(n+1)}\tau^{n+1} - 2\delta_0(n+1)!/a_n = 0 \quad \text{при } n \geq 1, \delta_m > 0. \end{aligned} \quad (1 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} x_n^{(2)}\tau^2 + 2 \cdot x_n^{(1)}\tau + 2\delta_0/a_0 = 0 \quad \text{при } n = 0, \delta_m < 0; \\ n \cdot x_n^{(n+2)}\tau^{n+2} + 2 \cdot x_n^{(n+1)}\tau^{n+1} + 2\delta_0(n+1)!/a_n = 0 \quad \text{при } n \geq 1, \delta_m < 0, \end{aligned} \quad (1 \text{ б})$$

где  $a_n$  – коэффициент, зависящий от степени полинома.

Рассмотрим решение этой задачи при следующих условиях. Восстановление сигнала после АД производится интерполяционным полиномом Лагранжа 0-ой степени. Качество воспроизведения (аппроксимации) устанавливается согласно критерию равномерного приближения [8].

Чтобы математически найти величину  $\tau$  необходимо выбрать математическую модель сигнала. Примем следующую структурную модель сигнала [9, 10]

$$\Phi = x^{(n+2)}(t)[x^{(n+1)}(t)] = x^{(n+2)}[x^{(n+1)}], t \in [0, t_m],$$

где  $x^{(n+1)}(t)$  и  $x^{(n+2)}(t)$  – контурные модели или фазовые координаты сигнала.

В рамках структурных моделей связь между фазовыми координатами характеризует структурные свойства сигнала и обычно выражается в виде

фазового изображения, представляющего собой след (траекторию) от движения изображающей точки на фазовой плоскости  $X^{(n+2)}OX^{(n+1)}$ .

Следовательно, в терминах данной модели величина текущего такта измерения при АВД зависит от структурных свойств сигнала, которые в свою очередь описываются его двумерным фазовым изображением с координатами  $x^{(n+1)}(t)$  и  $x^{(n+2)}(t)$ .

Найдем функциональную зависимость текущего такта измерения от структурных свойств сигнала. В общем виде уравнения (1) решить не представляется возможным. Поэтому ограничимся наиболее распространенными на практике случаем – интерполяция полином 0-й степени. Будем полагать, что любая точка фазовой траектории может быть началом участка аппроксимации длительности  $\Delta t = \tau$ .

В этом случае при  $n = 0$  уравнения (1 а, б) принимают вид

$$x^{(2)}\tau^2 + 2x^{(1)}\tau - 4\delta_0 = 0 \quad \text{при } \delta_m > 0; \quad (2 \text{ а})$$

$$x^{(2)}\tau^2 + 2x^{(1)}\tau + 4\delta_0 = 0 \quad \text{при } \delta_m < 0; \quad (2 \text{ б})$$

Формальное решение (2 а) и (2 б) дает четыре функциональных зависимости для такта измерения при АВД интерполяционного типа

$$\tau = \psi_{u0}(\delta_0, x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \tau_{1,2} = \frac{-x^{(1)} \pm \sqrt{D_1}}{x^{(2)}}; \\ \tau_{3,4} = \frac{-x^{(1)} \pm \sqrt{D_2}}{x^{(2)}}. \end{cases}$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – дискриминанты соответственно уравнений (2 а) и (2 б),

$$D_1 = (x^{(1)})^2 + 4\delta_0 x^{(2)} \text{ и } D_2 = (x^{(1)})^2 - 4\delta_0 x^{(2)}.$$

В то же время такт измерения при АВД, во-первых, является однозначной функцией производных  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  и, во-вторых, – действительная и положительная величина. Поэтому область решений

каждого уравнения должна ограничиваться областью действительных и положительных решений.

Условие  $\tau \geq 0$  ограничивает на фазовой плоскости  $X^{(2)}OX^{(1)}$  (рис. 1) область решений уравнения (2 а) областями I, II, III и VI, а уравнения (2 б) – III, IV, V и VI. При этом областям I и II соответствует единственное решение  $\tau_1$  уравнения (2 а). Областям IV и V – решение  $\tau_4$  уравнения (2 б), области III – решения  $\tau_3$  и  $\tau_4$  уравнения (2 б) и решение  $\tau_1$  уравнения (2 а) и, наконец, области VI – решения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  уравнения (2 а) и решение  $\tau_4$  уравнения (2 б).

В процессе действия алгоритма эквивалентной по величине  $\Delta t$  АД экстраполяционного типа текущая погрешность аппроксимации  $\delta'(t'')$  достигает заданной величины  $\delta'(\tau) = \pm\delta_0$  при  $t'' = \tau$ . При этом наращивание интервала  $\tau = \Delta t$  прекращается, фиксируется отсчет сигнала и действие алгоритма циклически повторяется. Поэтому в областях с несколькими решениями (III и VI) необходимо выбирать меньшее из них, а именно -  $\tau_4$  в III и  $\tau_1$  в VI.

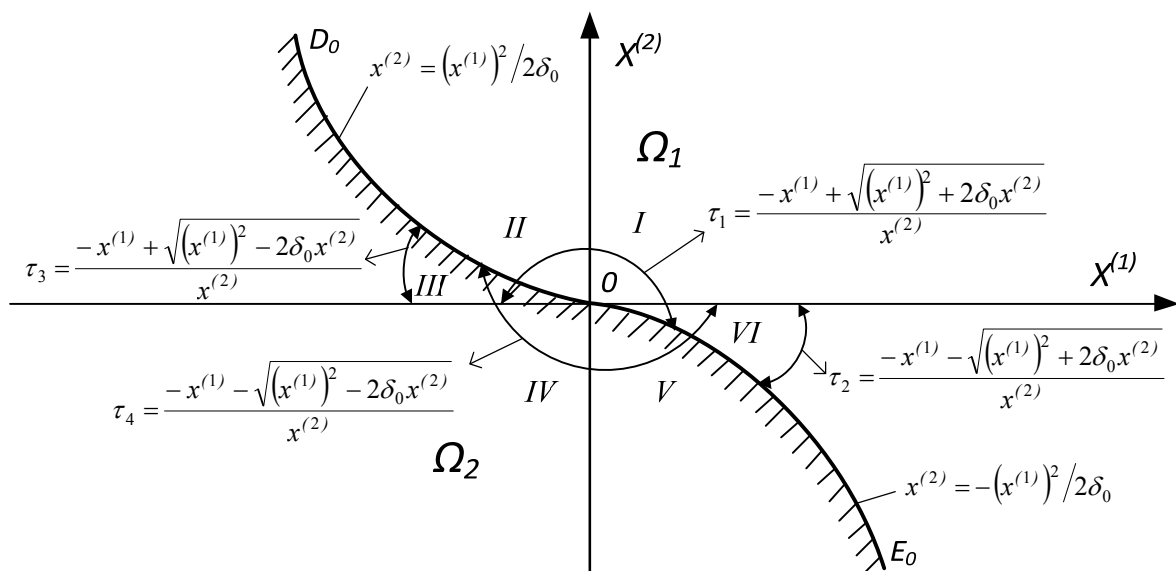


Рис. 1. Области решений для такта измерения при АД в случае ступенчатой интерполяции ( $n = 0$ )

В результате фазовая плоскость  $X^{(2)}OX^{(1)}$  разделяется кривой  $D_0OE_0$  (рис. 1), уравнение которой

$$F_0(x^{(2)}) = \begin{cases} f_1(x^{(1)}) = (x^{(1)})^2 / 4\delta_0 & \text{при } x^{(1)} \leq 0; \\ f_2(x^{(1)}) = -(x^{(1)})^2 / 4\delta_0 & \text{при } x^{(1)} \geq 0, \end{cases}$$

на две неограниченных замкнутых области  $\Omega_1$  – с единственным решением  $\tau_1$  уравнения (2 а) и  $\Omega_2$  (на рис. 1 она заштрихована) с единственным решением  $\tau_2$  уравнения (2 б), причем точки кривой  $OE_0$  принадлежат области  $\Omega_1$ , а кривой  $OD_0$  – области  $\Omega_2$ .

Таким образом, величине такта измерения при АД интерполяционного типа и степени полинома  $n = 0$  соответствует действительное, положительное и наименьшее в случае неоднозначности решение уравнений (2 а, б)

$$\tau_{u0} = \begin{cases} \psi_1(\delta_0, x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{-x^{(1)} + \sqrt{(x^{(1)})^2 + 4\delta_0 x^{(2)}}}{x^{(2)}} & \text{при } (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega_1; \\ \psi_2(\delta_0, x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{-x^{(1)} - \sqrt{(x^{(1)})^2 - 4\delta_0 x^{(2)}}}{x^{(2)}} & \text{при } (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (3)$$

Зависимость (3) в рамках структурной модели сигнала дает связь изображающей точки на фазовой плоскости  $X^{(2)}OX^{(1)}$  с текущим тактом измерения при АД. При этом двумерному фазовому изображению с координатами  $x^{(1)}(t)$  и  $x^{(2)}(t)$  будет согласно (3) соответствовать множество перекрывающихся [6, 7] тактов измерения  $\tau(t) = \psi_{1,2}(\delta_0, x^{(1)}(t), x^{(2)}(t))$ .

В качестве примера для полигармонического сигнала (рис. 2 а) в среде Mathcad получены аналоговый фазовый портрет (рис. 2 б), дискретный фазовый портрет (рис. 3 а) и на основании (3) соответствующий ему текущий такт измерения (рис. 3 б).

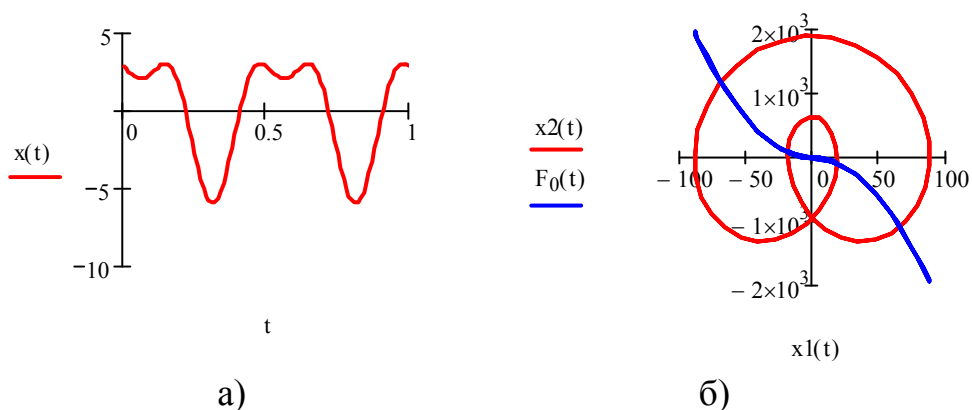


Рис. 2. Полигармонический сигнал и его фазовый портрет

На рисунках 2 и 3 приняты следующие обозначения:  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – аналоговые 1-ая и 2-ая производные,  $Pr_1$ ,  $Pr_2$  – векторы 1-ой и 2-ой производных,  $F_0$  – вектор функции  $F_0(x^{(2)})$ , описывающей кривую  $D_0OE_0$ .

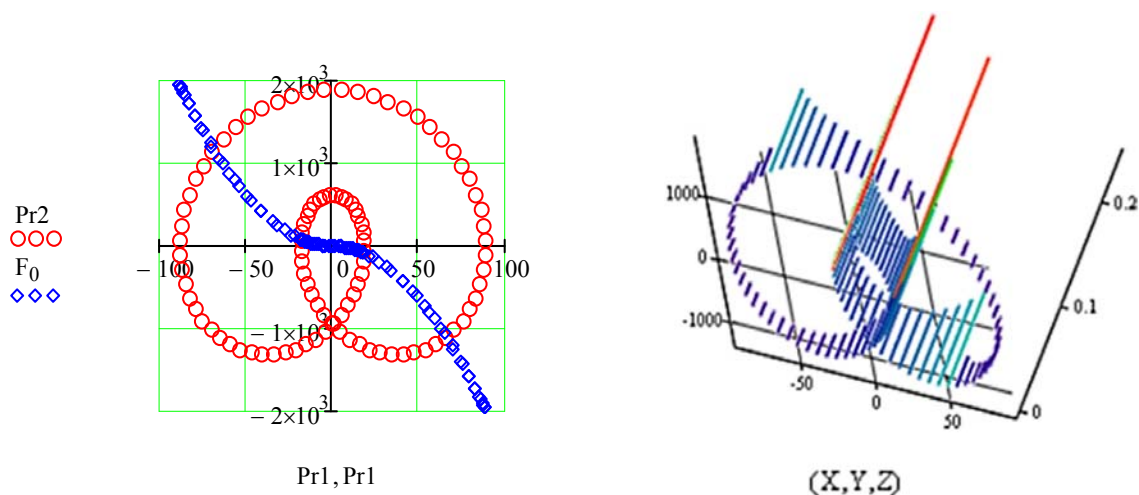


Рис. 3. Дискретный фазовый портрет и текущий такт измерения

Таким образом, получена зависимость  $\psi_{u0}$  (3) для множества перекрывающихся тактов измерения  $\tau(t)$  при АД, ориентированной на воспроизведение сигнала интерполяционным полиномом Лагранжа нулевой степени ( $n = 0$ ). На основании данной зависимости можно решать задачу нахождения средней длительности такта измерения при АД с последующей оценкой сжимаемости аналоговых сигналов.

## Литература

1. Адаптивные телеизмерительные системы / Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В., Под ред. Фремке А.В. Л.: Энерго-издат. Ленингр. отд-ние, 1981. 248 с.
  2. Куревин В.В., Морозов О.Г., Морозов Г.А. и др. Информационное обеспечение экологической безопасности территориально распределенных систем хранения опасных веществ // Инженерный вестник Дона, 2016, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3663](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3663).
  3. Нгуен Суан Мань, Попов Г.А. Система сбора данных по параметрам конструкций интеллектуального здания на основе волоконно-оптических датчиков // Инженерный вестник Дона. 2015. №3 URL: [ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_53\\_Nguyen.pdf\\_29bf05efed](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_53_Nguyen.pdf_29bf05efed).
  4. Кавчук С.В. Зависимость текущего такта измерения при адаптивной временной дискретизации экстраполяционного типа от структурных свойств сигнала // Инженерный вестник Дона, 2016, №4 URL: [ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_173\\_kavchuk.pdf\\_c921d62655.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_173_kavchuk.pdf_c921d62655.pdf).
  5. Qaisar, S.M., L.L. Fesquet and M.R. Laurent, 2009. Adaptive Rate Sampling and Filtering Based on Level Crossing Sampling. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009(10.1155/2009/971656), 160 p.
  6. Кавчук С.В., Ткаченко Г.И., Ткаченко М.Г. Оценка сжимаемости измерительных сигналов на основании априорных данных об их динамических свойствах // Естественные и технические науки. 2008. № 3. С. 15-18.
  7. Кавчук С.В., Ткаченко Г.И., Савченко Я.С. Априорная оценка средней длительности такта измерения и числа отсчетов при адаптивной временной дискретизации // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. №4. С. 147-155.
  8. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 327 с.
-

9. Заездный А.М., Плоткин Е.И., Черкасский Ю.А. Основы разделения и измерения сигналов по структурным свойствам. Л.: ЛЭИС, 1971. 124 с.

10. Mark, J.W. and T.D. Todd, 1981. A nonuniform sampling approach to data compression. IEEE Transactions on Communications (issue 29), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, pp: 24-32.

### References

1. Avdeev B.Ya., Antonyuk E.M., Dolinov S.N., Zhuravin L.G., Semenov E.I., Fremke A.V., Pod red. Fremke A.V. Adaptivnye teleizmeritel'nye sistemy [Adaptive telemeasuring system]. L.: Energoizdat. Leningr. otd-nie, 1981. 248 p.

2. Kurevin V.V., Morozov O.G., Morozov G.A. i dr. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3663](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3663).

3. Nguen Suan Man, Popov G.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №3. URL: [ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_53\\_Nguyen.pdf\\_29bf05efed](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_53_Nguyen.pdf_29bf05efed).

4. Kavchuk S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №4 URL: [ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_173\\_kavchuk.pdf\\_c921d62655](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_173_kavchuk.pdf_c921d62655).

5. Qaisar, S.M., L.L. Fesquet and M.R. Laurent, 2009. Adaptive Rate Sampling and Filtering Based on Level Crossing Sampling. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009(10.1155/2009/971656), 160 p.

6. Kavchuk S.V., Tkachenko G.I., Tkachenko M.G. Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2008. № 3. pp. 15-18.

7. Kavchuk S.V., Tkachenko G.I., Savchenko Ya.S. Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki. 2014. №4. pp. 147-155.

8. Goncharov V.L. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [The theory of interpolation and approximation of functions]. M.: Gostekhizdat, 1954. 327 p.





9. Zaezdnyy A.M., Plotkin E.I., Cherkasskiy Yu.A. Osnovy razdeleniya i izmereniya signalov po strukturnym svoystvam [Bases of division and measurement of signals by structural properties.]. L.: LEIS, 1971. 124 p.

10. Mark, J.W. and T.D. Todd, 1981. A nonuniform sampling approach to data compression. IEEE Transactions on Communications (issue 29), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, pp: 24-32.