Зависимость текущего такта измерения при адаптивной временной дискретизации экстраполяционного типа от структурных свойств сигнала

С.В. Кавчук

Южный федеральный университет, Таганрог

Аннотация: Эффективность алгоритмов адаптивной временной дискретизации (АВД) по сравнению с равномерной временной дискретизацией (РВД) определяется таким свойством аналогового сигнала как его сжимаемость. В целях теоретической оценки сжимаемости измерительных сигналов рассматривается зависимость текущего такта измерения при идеальной в смысле качества воспроизведения АВД от динамических свойств сигнала. Восстановление сигнала после АВД производится экстраполяционным полиномом n-ой степени. Качество аппроксимации устанавливается согласно критерию равномерного приближения. Для расширенной области допустимой погрешности воспроизведения предлагается в качестве динамических свойств сигнала использовать его структурные свойства. В случае полинома 0-й степени получена функциональная зависимость текущего такта измерения от структурных свойств сигнала, позволяющая на ее основе определять среднюю длительность такта измерения при АВД.

Ключевые слова: Аналого-цифровое преобразование, адаптивная временная дискретизация, такт измерения, коэффициент сокращения числа отсчетов, структурные свойства сигнала.

В настоящее время все большее распространение получают территориально распределенные системы сбора и обработки измерительной информации. В таких системах актуальной является задача сокращения избыточности передаваемой информации. Одним из методов сокращения измерительной информации на этапе аналого-цифрового преобразования аналоговых сигналов является адаптивная временная дискретизация (АВД) [1-3]. Эффективность применения алгоритмов АВД по сравнению с равномерной временной дискретизацией (РВД) в цифровых информационно-измерительных системах определяется коэффициентом сокращения числа отсчетов (сжатия), который зависит как от вида алгоритма АВД, так и от динамических свойств аналогового сигнала [4-6].

При этом величина сжатия посредством АВД (как инструмента) в основном зависит от способности сигнала (как материала) к сжатию. По аналогии со способностью вещества изменять свой объём под действием внешнего давления данное свойство сигнала можно характеризовать как его сжимаемость.

Для теоретической оценки сжимаемости аналоговых сигналов нужно последовательно определять [7]**:**

1) зависимость текущего такта измерения τ при идеальной в смысле качества воспроизведения АВД от динамических свойств сигнала;

2) среднюю длительность такта измерения и число отсчетов при АВД.

В данной работе рассматривается решение первой задачи при следующих условиях. Восстановление сигнала после АВД производится экстраполяционным полиномом n -ой степени. Качество воспроизведения (аппроксимации) устанавливается согласно критерию равномерного приближения.

Чтобы математически найти величину τ необходимо, во-первых, выбрать, конкретизируя класс функций, математическую модель сигнала и, во-вторых, наложить соответствующие ограничения на величину допустимой погрешности воспроизведения δ_0.

Поскольку в теории приближения функций [8] для принятых условий рассматривается класс аналитических (т.е. бесконечно дифференцируемых) функций, то в качестве математической модели сигнала целесообразно принять аналитическую функцию $x(t), t \in [0, t_m]$. Данную функцию можно рассматривать как полную, контурную модель сигнала. Эта модель является определенной идеализацией реальных сигналов. Однако она позволяет довольно хорошо их описать на каждом ограниченном интервале $[t_{i-1}, t_i] \in [0, t_m]$ оценочной функцией $x^*(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$ в виде степенного алгебраического полинома.

В отличие от допущения, принятого при оценке средней длительности такта измерения при АВД в [7], будем полагать, что величина модуля допустимой погрешности воспроизведения δ_0 ограничена менее жестким условием. Пусть она принадлежит области Δ_1 таких значений, при которых на каждом участке аппроксимации длительности Δt производная сигнала *(n+2)*-го порядка $x^{(n+2)}(t) \cong const, t \in [t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$ или, вводя новую переменную $t' = t - t_{i-1}$, в другой форме $x^{(n+2)}(t_{i-1} + t') \cong const, t' \in [0, \Delta t]$ (сокращенно $t' \in \Delta t$). Для принятого ограничения на величину $\delta_0 \in \Delta_1$ правомерно считать, что на каждом участке аппроксимации сигнал достаточно точно описывается полиномом *(n+2)*-го порядка.

Установим величину текущего такта измерения для идеального (в смысле качества воспроизведения) алгоритма АВД экстраполяционного типа. Следует отметить, что условие идеальности качества воспроизведения предполагает на каждом участке аппроксимации точное выполнение равенства $\delta_0 = |\delta_m|$, где $|\delta_m| = max|\delta(t')|, t' \in \Delta t$ - модуль-максимум текущей погрешности аппроксимации $\delta(t') = x(t') - x^*(t')$. Идеальным в вышеназванном смысле алгоритмам АВД, ориентированным на воспроизведения сигнала экстраполяционным полиномом, соответствуют известные аппроксимационные (А) алгоритмы экстраполяционного (Э) типа (АВД-АЭ) [9]. Это позволяет при рассмотрении процесса идеальной АВД ориентироваться на соответствующий алгоритм АВД-АЭ.

В результате действия алгоритма АВД-АЭ при экстраполяции функции $x(t'), t' \in \Delta t$ полиномом Тейлора $T_n(t') = x^*(t'), t' \in \Delta t$ и принятом ограничении на величину δ_0 текущая погрешность аппроксимации

$$\delta(t') = x(t') - T_n(t') = x_н^{(n+1)} \cdot \frac{(t')^{(n+1)}}{(n+1)!} + x_н^{(n+2)} \cdot \frac{(t')^{(n+2)}}{(n+2)!}, t' \in \Delta t$$

где $x_н^{(n+1)}$ и $x_н^{(n+2)}$ значения *(n+1)*-ой и *(n+2)*-ой производных в начале каждого участка аппроксимации.

Текущая погрешность $\delta(t')$ всегда достигает своего максимального значения $\delta_m = \pm\delta_0$ в конце каждого участка экстраполяции при $t' = \Delta t = \tau$. Поэтому это условие может быть записано в виде двух уравнений:

$$(n+1)!\cdot x_н^{(n+2)}\tau^{(n+2)} + (n+2)!\cdot x_н^{(n+1)}\tau^{(n+1)} - \delta_0(n+1)!(n+2)! = 0 \quad при\ \delta_m \succ 0; \text{ (1 а)}$$

$$(n+1)!\cdot x_н^{(n+2)}\tau^{(n+2)} + (n+2)!\cdot x_н^{(n+1)}\tau^{(n+1)} + \delta_0(n+1)!(n+2)! = 0 \quad при\ \delta_m \prec 0; \text{ (1 б)}$$

Решение уравнений (1а, б) относительно τ дает возможность найти зависимость текущего такта измерения при идеальной АВД экстраполяционного типа от локальных, дифференциальных свойств сигнала – $\tau = \psi_э(\delta_0, x_н^{(n+1)}, x_н^{(n+2)})$.

В данном случае по отношению к задаче определения текущего такта полная, контурная модель сигнала (аналитическая функциях $x(t), t \in [0, t_m]$) обладает свойством математической избыточности. С другой стороны, для решения этой же задачи неполная, контурная модель сигнала в виде функции $x^{(n+1)}(t), t \in [0, t_m]$ математически явно недостаточна.

Необходимость учета по крайней мере двух производных в процессе нахождения τ по ψ приводит к выбору структурной модели сигнала [9,10]

$$\Phi = x^{(n+2)}(t)[x^{(n+1)}(t)] = x^{(n+2)}[x^{(n+1)}], t \in [0, t_m],$$

где $x^{(n+1)}(t)$ и $x^{(n+2)}(t)$ - контурные модели или фазовые координаты сигнала.

В рамках структурных моделей связь между фазовыми координатами характеризует структурные свойства сигнала и обычно выражается в виде фазового изображения, представляющего собой след (траекторию) от движения изображающей точки на фазовой плоскости $X^{(n+2)}OX^{(n+1)}$.

Таким образом, в терминах данной модели величина текущего такта измерения при АВД зависит от структурных свойств сигнала, которые в свою очередь описываются его двумерным фазовым изображением с координатами $x^{(n+1)}(t)$ и $x^{(n+2)}(t)$.

Найдем функциональную зависимость текущего такта измерения от структурных свойств сигнала. В общем виде уравнения (1) решить не представляется возможным. Поэтому ограничимся наиболее распространенным на практике случаем – экстраполяция полиномом 0-й степени. Будем полагать, что любая точка фазовой траектории может быть началом участка аппроксимации длительности $\Delta t = \tau$.

Экстраполяция полиномом 0-й степени. Тогда при *n =0* уравнения (1 а, б) принимают вид

$$x^{(2)}\tau^2 + 2x^{(1)}\tau - 2\delta_0 = 0 \quad \textit{при } \delta_m \succ 0; \qquad (8\text{ а})$$

$$x^{(2)}\tau^2 + 2x^{(1)}\tau + 2\delta_0 = 0 \quad \textit{при } \delta_m \prec 0; \qquad (8\text{ б})$$

Формальное решение (8 а) и (8 б) дает четыре функциональных зависимости для такта измерения при АВД экстраполяционного типа

$$\tau = \psi_{э0}(\delta_0, x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \tau_{1,2} = \psi_{1,2}(\delta_0, x^{(1)}, x^{(2)}) = \dfrac{-x^{(1)} \pm \sqrt{D_1}}{x^{(2)}}; \\ \tau_{3,4} = \psi_{3,4}(\delta_0, x^{(1)}, x^{(2)}) = \dfrac{-x^{(1)} \pm \sqrt{D_2}}{x^{(2)}}. \end{cases}$$

где D_1 и D_2 – дискриминанты соответственно уравнений (8 а) и (8 б),

$$D_1 = \left(x^{(1)}\right)^2 + 2\delta_0 x^{(2)} \text{ и } D_2 = \left(x^{(1)}\right)^2 - 2\delta_0 x^{(2)}.$$

В то же время не вызывает сомнения тот факт, что такт измерения при АВД при заданных способе и величине допустимой погрешности воспроизведения является однозначной функцией производных $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Из физических представлений такт измерения при АВД – действительная и положительная величина. Это условие ограничивает область решений каждого уравнения областью действительных и положительных решений.

Условие $\tau \geq 0$ ограничивает на фазовой плоскости $X^{(2)}OX^{(1)}$ (рис. 1) область решений уравнения (8 а) областями I, II, III и VI, а уравнения (8 б) – III, IV, V и VI. При этом областям I и II соответствует единственное решение

τ_1 уравнения (8 а). Областям IV и V – решение τ_4 уравнения (8 б), области III – решения τ_3 и τ_4 уравнения (8 б) и решение τ_1 уравнения (8 а) и, наконец, области VI – решения τ_1 и τ_2 уравнения (8 а) и решение τ_4 уравнения (8 б).

Для наглядности на этом же рисунке показан графический метод решения уравнений (8 а, б) по графику текущей погрешности экстраполяции $\delta(t')$ соответственно для каждой области.

Действие алгоритма АВД-АЭ [9] на каждом участке экстраполяции связано с непрерывным контролем текущей погрешности аппроксимации $\delta(t')$ сигнала полиномом Тейлора $T_n(t'), t' \in \tau = \Delta t$ в процессе последовательного наращивания длины τ интервала экстраполяции. Как только текущая погрешность аппроксимации $\delta(t')$ достигает заданной величины δ_0, наращивание интервала τ прекращается, фиксируется отсчет сигнала и действие алгоритма циклически повторяется.

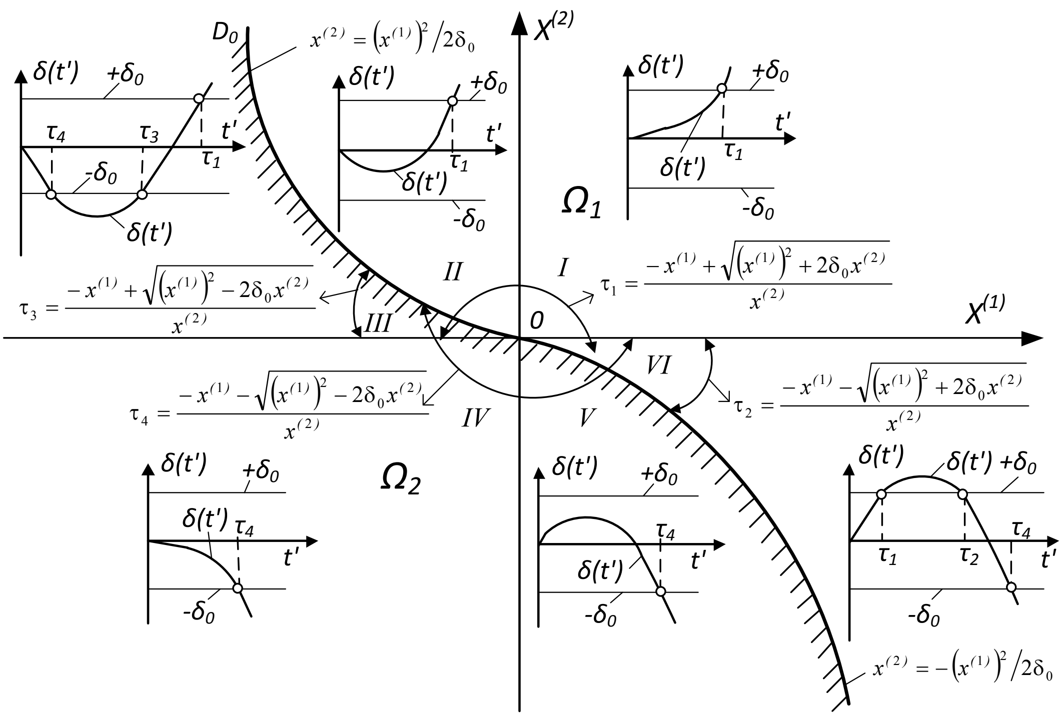


Рис. 1.Области решений для такта измерения при АВД-АЭ
в случае ступенчатой экстраполяции (*n = 0*)

Учитывая данный характер действия алгоритма АВД-АЭ, в областях с несколькими решениями (III и VI) необходимо выбирать меньшее из них, а именно - τ_4 в III и τ_1 в VI, что особенно наглядно видно при графическом методе решения уравнений (8 а, б) по функции текущей погрешности аппроксимации, рис. 1.

В результате фазовая плоскость $X^{(2)}OX^{(1)}$ разделяется кривой D_0OE_0 (рис. 1), уравнение которой

$$F_0\left(x^{(2)}\right)=\begin{cases} f_1\left(x^{(1)}\right)=\left(x^{(1)}\right)^2/2\delta_0 & при\ x^{(1)}\le 0\,; \\ f_2\left(x^{(1)}\right)=-\left(x^{(1)}\right)^2/2\delta_0 & при\ x^{(1)}\ge 0, \end{cases} \qquad (9)$$

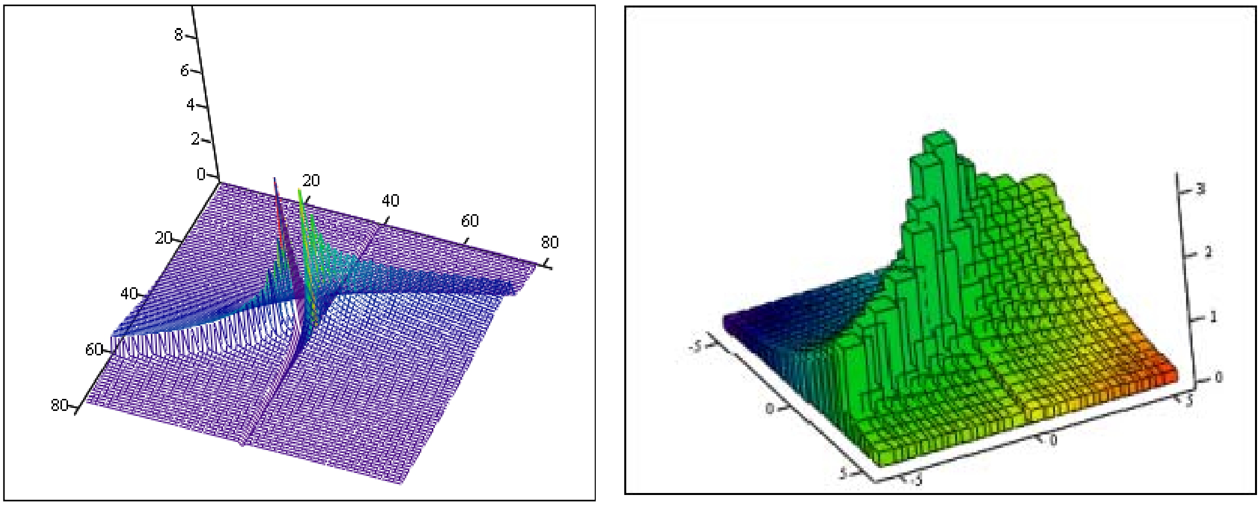
на две неограниченных замкнутых области Ω_1 – с единственным решением τ_1 уравнения (8 а) и Ω_2 (на рис. 1 она заштрихована) с единственным решением τ_4 уравнения (8 ,б), причем точки кривой OE_0 принадлежат области Ω_1 , а кривой OD_0 – области Ω_2.

Таким образом, величине такта измерения при АВД экстраполяционного типа и степени полинома $n = 0$ соответствует действительное, положительное и наименьшее в случае неоднозначности решение уравнений (8 а, б)

$$\tau_{э0}=\begin{cases} \psi_1(\delta_0,x^{(1)},x^{(2)})=\dfrac{-x^{(1)}+\sqrt{\left(x^{(1)}\right)^2+2\delta_0x^{(2)}}}{x^{(2)}} & при\ (x^{(1)},x^{(2)})\in\Omega_1; \\ \psi_2(\delta_0,x^{(1)},x^{(2)})=\dfrac{-x^{(1)}-\sqrt{\left(x^{(1)}\right)^2-2\delta_0x^{(2)}}}{x^{(2)}} & при\ (x^{(1)},x^{(2)})\in\Omega_2. \end{cases} \qquad (10)$$

Зависимость (10) в рамках структурной модели сигнала дает связь изображающей точки на фазовой плоскости $X^{(2)}OX^{(1)}$ с текущим тактом измерения при АВД. При этом двумерному фазовому изображению с координатами $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ будет согласно (10) соответствовать множество перекрывающихся тактов измерения $\tau(t)=\psi_{1,2}\left(\delta_0,x^{(1)}(t),x^{(2)}(t)\right)$.

Пространственное 3D изображение Mathcad перекрывающихся тактов измерения согласно формуле (10) в виде поверхности и столбчатой диаграммы показано соответственно на рис. (2 а) и (2 б).



τ а) τ б)

Рис. 2. Пространственная картина множества перекрывающихся тактов измерения при АВД экстраполяционного типа и степени полинома $n = 0$

Заключение. Получена зависимость $\psi_{э0}$ (10) для множества перекрывающихся тактов измерения $\tau(t)$ при АВД, ориентированной на воспроизведение сигнала полиномом Тейлора нулевой степени (n = 0). На основании этой зависимости можно решать задачу нахождения средней длительности такта измерения при АВД с последующей оценкой сжимаемости аналоговых сигналов.

Полученные соотношения позволяют также оценивать сжимаемость случайных сигналов, полагая функцию *x(t)* реализацией дифференцируемого случайного процесса *X(t)*.

Литература

1. Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В. Адаптивные телеизмерительные системы / Под ред. Фремке А.В. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. 248 с.

2. Куревин В.В., Морозов О.Г., Морозов Г.А. и др. Новые интегральные решения для разработки сборщиков энергии из окружающей среды. // Инженерный вестник Дона. 2016. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_79_Sinyutin.pdf_e8c1c28197.pdf.

3. Нгуен Суан Мань, Попов Г.А. Система сбора данных по параметрам конструкций интеллектуального здания на основе волоконно-оптических датчиков. // Инженерный вестник Дона. 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_53_Nguyen.pdf_29bf05efed.pdf.

4. Кавчук С.В. Теоретические основы информационно-измерительной техники. Конспект лекций. Часть I. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. 125 с.

5. Qaisar, S.M., L.L. Fesquet and M.R. Laurent, 2009. Adaptive Rate Sampling and Filtering Based on Level Crossing Sampling. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009(10.1155/2009/971656), 160 p.

6. Кавчук С.В., Ткаченко Г.И., Ткаченко М.Г. Оценка сжимаемости измерительных сигналов на основании априорных данных об их динамических свойствах // Естественные и технические науки. 2008. № 3. С. 15-18.

7. Кавчук С.В., Ткаченко Г.И., Савченко Я.С. Априорная оценка средней длительности такта измерения и числа отсчетов при адаптивной временной дискретизации // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. №4. С. 147-155.

8. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 327 с.

9. Авдеев Б.Я., Семенов Е.И. Адаптивные информационно-измерительные системы (с адаптивной коммутацией) // Приборы. 2009. №10.

С. 57-64.

10. Mark, J.W. and T.D. Todd, 1981. A nonuniform sampling approach to data compression. IEEE Transactions on Communications (issue 29), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, pp: 24-32.

References

1. Avdeev B.Ya., Antonyuk E.M., Dolinov S.N., Zhuravin L.G., Semenov E.I., Fremke A.V., Pod red. Fremke A.V. Adaptivnye teleizmeritel'nye sistemy [Adaptive telemeasuring system] L.: Energo-izdat. Leningr. otd-nie, 1981. 248 p.

2. Kurevin V.V., Morozov O.G., Morozov G.A. i dr. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2016. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_79_Sinyutin.pdf_e8c1c28197.pdf.

3. Nguen Suan Man', Popov G.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_53_Nguyen.pdf_29bf05efed.pdf.

4. Kavchuk S.V. Teoreticheskie osnovy informatsionno-izmeritel'noy tekhniki. Konspekt lektsiy. Chast' I [Theoretical bases of information-measuring equipment. Lecture notes. Part I]. Taganrog: Izd-vo TRTU, 2001. 125 p.

5. Qaisar, S.M., L.L. Fesquet and M.R. Laurent, 2009. Adaptive Rate Sampling and Filtering Based on Level Crossing Sampling. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2009(10.1155/2009/971656), 160 p.

6. Kavchuk S.V., Tkachenko G.I., Tkachenko M.G. Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2008. № 3. pp. 15-18.

7. Kavchuk S.V., Tkachenko G.I., Savchenko Ya.S. Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki. 2014. №4. pp. 147-155.

8. Goncharov V.L. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [The theory of interpolation and approximation of functions]. M.: Gostekhizdat, 1954. 327 p.

9. Avdeev B.Ya., Semenov E.I. [Adaptive information-measuring system (adaptive commutation)]. Pribory. 2009. №10. pp. 57-64.

10. Mark, J.W. and T.D. Todd, 1981. A nonuniform sampling approach to data compression. IEEE Transactions on Communications (issue 29), Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, pp: 24-32.