Аппроксимация 3-й краевой задачи схемами повышенного порядка точности

А.А. Семенякина[1], Д.С. Хачунц[1], И.Ю. Кузнецова[1], С.В. Проценко[2]

[1]Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева, г.Таганрог

[2]Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог

Аннотация: Работа посвящена исследованию аппроксимации 3-й краевой задачи схемами повышенного порядка точности. Получены аппроксимации оператора конвективно-диффузионного переноса разностной схемой, при том, что разностная схема обладает 4-ым порядком погрешности аппроксимации. Дискретный оператор диффузионного переноса рассмотрен при отсутствии влияния границы области. Было установлено, что построенная схема повышенного порядка точности аппроксимирует оператор диффузионного переноса в приграничных узлах в случае граничных условий 3-его рода со 2-ым порядком точности.

Ключевые слова: Схемы повышенного порядка точности, диффузия, диффузионный перенос, дискретный оператор, аппроксимация, граничные условия, краевая задача, разностная схема.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение диффузии-конвекции-реакции [1, 2], которое выступает как задача транспорта веществ:

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = \left(\mu c'_x\right)'_x + \left(\mu c'_y\right)'_y + f,$$

с учетом граничных условий:

$$c'_n\left(x, y, t\right) = \alpha_n c + \beta_n,$$

где f – функция, описывающая распределение и интенсивность источников, μ – коэффициент турбулентного обмена, u,v – компоненты вектора скорости.

Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи введем равномерную сетку:

$$w_h = \left\{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y;\ n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y};\right.$$
$$\left. N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\right\},$$

где τ – шаг по времени, N_x, N_y – границы по пространству, N_t – верхняя граница по времени, h_x, h_y – шаги по пространству,

В случае частичной заполненности ячеек дискретные аналоги 2-ого порядка погрешности аппроксимации операторов конвективного uc'_x и диффузионного $\left(\mu c'_x\right)'_x$ переноса выглядят следующим образом [3,4]:

$$\left(q_0\right)_{i,j} uc'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + \left(q_2\right)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \tag{1}$$

$$\left(q_0\right)_{i,j} \left(\mu c'_x\right)'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - \left(q_2\right)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - \tag{2}$$

$$-\left|\left(q_1\right)_{i,j} - \left(q_2\right)_{i,j}\right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.$$

где q_i – коэффициенты «заполненности» контрольных областей [5].

Для аппроксимации третьей краевой задачи диффузии-конвекции достаточно рассмотреть оператор диффузионного переноса $\left(\mu c'\right)'$. Построим аппроксимацию оператора диффузионного переноса $\left(\mu c'\right)'$ разностной схемой четвертого порядка точности, аппроксимируя оператор $\left(\mu c'\right)' - \mu c^{(IV)} h^2/12 - \mu'' c'' h^2/4 - \mu' c''' h^2/6 - \mu''' c' h^2/6$ вторым порядком точности [6, 7].

3-я краевая задача

Рассмотрим случай, когда $\mu = const$. Тогда для получения схемы четвертого порядка погрешности аппроксимации достаточно будет рассмотреть выражение $\left(\mu c'\right)' - \mu c^{(IV)} h^2/12$.

Для этого доопределим задачу вычислительными граничными условиями $c'''_n = 0$. Для этого обозначим:

$L(c)=L_1(c)-L_2(c)$, $L_1(c)=(\mu c')'$, $L_2(c)=(\mu c''')'\,h^2/12$.

Запишем аппроксимацию оператора $L_1(c)$:

$$(q_0)_i L_1(c)\simeq(q_1)_i\,\mu\frac{c_{i+1}-c_i}{h^2}-(q_2)_i\,\mu\frac{c_i-c_{i-1}}{h^2}-\left|(q_1)_i-(q_2)_i\right|\mu\frac{\alpha c_i+\beta}{h}.$$

Аппроксимация оператора $L_2(c)$ с учетом граничного условия $s_n'=0$ и $s=c''$:

$$(q_0)_i L_2(c)\simeq(q_1)_i\,\mu\frac{s_{i+1}-s_i}{12}-(q_2)_i\,\mu\frac{s_i-s_{i-1}}{12},\tag{3}$$

$$(q_0)_i s_i\simeq(q_1)_i\frac{c_{i+1}-c_i}{h^2}-(q_2)_i\frac{c_i-c_{i-1}}{h^2}-\left|(q_1)_i-(q_2)_i\right|\frac{\alpha c_i+\beta}{h}.\tag{4}$$

Подставим (3) в выражение (4), в результате чего получим:

$$(q_0)_i L_2(c)\simeq(q_1)_i\,\mu\left(\frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}\frac{c_{i+2}-c_{i+1}}{12h^2}-\frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}\frac{c_{i+1}-c_i}{12h^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left|(q_1)_{i+1}-(q_2)_{i+1}\right|}{(q_0)_{i+1}}\frac{\alpha c_{i+1}+\beta}{12h}\right)-$$
$$-2(q_0)_i\,\mu\left(\frac{(q_1)_i}{(q_0)_i}\frac{c_{i+1}-c_i}{12h^2}-\frac{(q_2)_i}{(q_0)_i}\frac{c_i-c_{i-1}}{12h^2}-\frac{\left|(q_1)_i-(q_2)_i\right|}{(q_0)_i}\frac{\alpha c_i+\beta}{12h}\right)+$$
$$+(q_2)_i\,\mu\left(\frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}\frac{c_i-c_{i-1}}{12h^2}-\frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}\frac{c_{i-1}-c_{i-2}}{12h^2}-\frac{\left|(q_1)_{i-1}-(q_2)_{i-1}\right|}{(q_0)_{i-1}}\frac{\alpha c_{i-1}+\beta}{12h}\right)$$

или

$$(q_0)_i L_2(c)\simeq-\left(-\frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}(q_1)_i\frac{\mu}{12h^2}\right)c_{i+2}-(q_1)_i\frac{\mu}{3h^2}c_{i+1}+$$
$$+\frac{\mu}{12h^2}\left(\frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}(q_1)_i+4(q_0)_i+(q_2)_i\frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}\right)c_i-$$
$$-(q_2)_i\frac{\mu}{3h^2}c_{i-1}-\left(-(q_2)_i\frac{\mu}{12h^2}\frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}c_{i-2}\right)-(q_1)_i\,\mu\frac{\left|(q_1)_{i+1}-(q_2)_{i+1}\right|}{(q_0)_{i+1}}\frac{\alpha c_{i+1}+\beta}{12h}+$$

$$+\frac{\mu}{6}\left|(q_1)_i-(q_2)_i\right|\frac{\alpha c_i+\beta}{h}-(q_2)_i\,\mu\frac{\left|(q_1)_{i-1}-(q_2)_{i-1}\right|}{(q_0)_{i-1}}\frac{\alpha c_{i-1}+\beta}{12h}.$$

Таким образом, представление оператора диффузионного переноса $(\mu c')'$ разностной схемой, четвертого порядка точности может быть записано в следующем виде:

$$-(q_0)_i L(c)\simeq-\left(-\frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}(q_1)_i\frac{\mu}{12h^2}\right)c_{i+2}-(q_1)_i\frac{4\mu}{3h^2}c_{i+1}+ \tag{5}$$

$$+\frac{\mu}{12h^2}\left(\frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}(q_1)_i+28(q_0)_i+(q_2)_i\frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}\right)c_i-(q_2)_i\frac{4\mu}{3h^2}c_{i-1}-$$

$$-\left(-(q_2)_i\frac{\mu}{12h^2}\frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}c_{i-2}\right)-(q_1)_i\,\mu\frac{\left|(q_1)_{i+1}-(q_2)_{i+1}\right|}{(q_0)_{i+1}}\frac{\alpha c_{i+1}+\beta}{12h}+$$

$$+\frac{7\mu}{6}\left|(q_1)_i-(q_2)_i\right|\frac{\alpha c_i+\beta}{h}-(q_2)_i\,\mu\frac{\left|(q_1)_{i-1}-(q_2)_{i-1}\right|}{(q_0)_{i-1}}\frac{\alpha c_{i-1}+\beta}{12h}.$$

Рассмотрим аппроксимацию граничных условий. Пусть $(q_1)_{i+1}=1,(q_1)_i=1,(q_2)_i=0$, тогда аппроксимация оператора диффузионного переноса запишется:

$$L(c)\simeq-\mu\frac{c_{i+2}-16c_{i+1}+15c_i}{6h^2}-\frac{7}{3}\mu\frac{\alpha c_i+\beta}{h}. \tag{6}$$

Представим в виде ряда Тейлора функцию c в узлах $i+2,i+1$ относительно i:

$$c_{i+1}=c_i+hc_i'+\frac{h^2}{2}c_i''+\frac{h^3}{6}c_i'''+O\left(h^4\right),\ c_{i+2}=c_i+2hc_i'+2h^2c_i''+\frac{4h^3}{3}c_i'''+O\left(h^4\right). \tag{7}$$

Запишем $c_{i+2}-16c_{i+1}+15c_i$ с учетом преставлений (7):

$$c_{i+2}-16c_{i+1}+15c_i=c_i+2hc_i'+2h^2c_i''+\frac{4h^3}{3}c_i'''-16c_i-16hc_i'-8h^2c_i''-\frac{8h^3}{3}c_i'''+$$

$$+15c_i + O\left(h^4\right) = -14hc_i' - 6h^2c_i'' - \frac{4h^3}{3}c_i''' + O\left(h^4\right).$$

Подставим данное выражение в уравнение (6), в результате чего получим:

$$L(c) \simeq \mu\frac{7\left(c_i' - \alpha c_i - \beta\right)}{3h} + \mu c_i'' + \frac{2}{9}hc_i''' + O\left(h^2\right). \tag{8}$$

Из полученного выражения и равенств $c' = \alpha c + \beta, c''' = 0$ следует, что схема (9) аппроксимирует оператор диффузионного переноса в случае граничных условий третьего рода со вторым порядком точности.

Теперь рассмотрим случай $\left(q_1\right)_{i+1} = 1, \left(q_1\right)_i = 1, \left(q_2\right)_i = 1, \left(q_2\right)_{i-1} = 0$, тогда аппроксимация оператора диффузионного переноса запишется:

$$L(c) \simeq -\mu\frac{c_{i+2} - 16c_{i+1} + 31c_i - 16c_{i-1}}{12h^2} + \mu\frac{\alpha c_{i-1} + \beta}{6h}. \tag{9}$$

Представим в виде ряда Тейлора функцию c в узлах $i+2, i+1, i$ относительно $i-1$:

$$c_i = c_{i-1} + hc_{i-1}' + \frac{h^2}{2}c_{i-1}'' + \frac{h^3}{6}c_{i-1}''' + O\left(h^4\right), \tag{10}$$

$$c_{i+1} = c_{i-1} + 2hc_{i-1}' + 2h^2c_{i-1}'' + \frac{4h^3}{3}c_{i-1}''' + O\left(h^4\right), \tag{11}$$

$$c_{i+2} = c_{i-1} + 3hc_{i-1}' + \frac{9h^2}{2}c_{i-1}'' + \frac{9h^3}{2}c_{i-1}''' + O\left(h^4\right). \tag{12}$$

Запишем $c_{i+2} - 16c_{i+1} + 31c_i - 16c_{i-1}$ с учетом преставлений (10) – (12):

$$c_{i+2} - 16c_{i+1} + 31c_i - 16c_{i-1} = c_{i-1} + 3hc_{i-1}' + \frac{9h^2}{2}c_{i-1}'' + \frac{9h^3}{2}c_{i-1}''' - \tag{13}$$

$$-16c_{i-1} - 32hc_{i-1}' - 32h^2c_{i-1}'' - \frac{64h^3}{3}c_{i-1}''' + 31c_{i-1} + 31hc_{i-1}' + 31\frac{h^2}{2}c_{i-1}'' +$$

$$+31\frac{h^3}{6}c_{i-1}''' - 16c_{i-1} + O\left(h^4\right) = 2hc_{i-1}' - 12h^2c_{i-1}'' - \frac{70h^3}{6}c_{i-1}''' + O\left(h^4\right).$$

Выражение (9) с учетом равенства (13) запишется в следующем виде:

$$L(c) \simeq -\mu \frac{2h\left(c'_{i-1} - \alpha c_{i-1} - \beta\right)}{12h^2} + \mu c''_{i-1} - \frac{35hc'''_{i-1}}{36} + O\left(h^2\right). \quad (14)$$

Из полученного выражения и равенств $c' = \alpha c + \beta, c''' = 0$ следует, что схема (14) аппроксимирует оператор диффузионного переноса в приграничных узлах в случае граничных условий третьего рода со вторым порядком точности.

Заключение

Построены схемы повышенного (четвертого) порядка точности для операторов конвективного и диффузионного переносов, которые учитывают заполненность ячеек. Исследована аппроксимация третьей краевой задачи диффузии-конвекции для оператора диффузионного переноса. Схема повышенного (четвертого) порядка точности для оператора диффузионного переноса аппроксимирует данный оператор в приграничных узлах в случае граничных условий третьего рода со вторым порядком точности. Для аппроксимации задачи по временной переменной предлагается использовать схемы с весами [8]. После дискретизации задача сводится к решению сеточных уравнений для решения которых предлагается применять адаптивный вариант попеременно-треугольного метода [9], который показал себя как наиболее эффективный метод при решении задач гидродинамики [10, 11].

Работа выполнена при частичной поддержке задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, РФФИ по проектам №15-07-08626, № 15-01-08619.

Литература

1. Дегтярева Е.Е., Проценко Е.А., Чистяков А.Е. Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных

акваториях// Инженерный вестник Дона. 2012. Т. 23. № 4-2. С. 30. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1283.

2. Никитина А.В., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Применение адаптивного модифицированного попеременно–треугольного итерационного метода для численной реализации двумерной математической модели движения водной среды// Инженерный вестник Дона. – 2012, – Т.20, №2, – С. 335–339. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/794

3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука, 1989.

4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. №4. С. 610-620.

5. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах // Выч. мет. программирование, 2015. Т 16. №3. С. 328-338.

6. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Семенякина А.А., Никитина А.В. Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16. № 2. С. 256-267.

7. Чистяков А.Е., Семенякина А.А. Применение методов интерполяции для восстановления донной поверхности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. №4. – С. 21-28.

8. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V. Error estimate for diffusion equations solved by schemes with weights // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. Vol. 6, Issue 3. pp. 324-331.

9. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator //

Mathematical Models and Computer Simulations. 2012. Vol. 4, Issue 4. pp. 398-409.

10. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. Vol. 6, Issue 4. pp. 351-363.

11. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Timofeeva E. F., Shishenya A. V. Mathematical model for calculating coastal wave processes // Mathematical Models and Computer Simulations. 2013. Vol. 5, Issue 2. pp. 122-129.

References

1. Degtjareva E.E., Procenko E.A., Chistjakov A.E. Inženernyj vestnik Dona, (Rus), 2012. Vol. 23. № 4-2. pp. 30. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1283.
2. Nikitina A.V., Chistjakov A.E., Fomenko N.A. Inženernyj vestnik Dona, (Rus), 2012, Vol.20, №2, pp. 335–339. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/794
3. Samarskij A.A. Teorija raznostnyh shem [The theory of difference schemes]. M. Nauka, 1989.
4. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Procenko E.A. Vychislitel'nye metody i programmirovanie, 2014. Vol. 15. №4. pp. 610-620.
5. Suhinov A.I., Procenko E.A., Chistjakov A.E., Shreter S.A. Vychislitel'nye metody i programmirovanie, 2015. Vol. 16. №3. pp. 328-338.
6. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Semenjakina A.A., Nikitina A.V. Vychislitel'nye metody i programmirovanie, 2015. Vol. 16. № 2. pp. 256-267.
7. Chistjakov A.E., Semenjakina A.A. Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki, 2013. №4. pp. 21-28.
8. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V. Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. Vol. 6, Issue 3. pp. 324-331.

9. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E. Mathematical Models and Computer Simulations. 2012. Vol. 4, Issue 4. pp. 398-409.
10. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. Vol. 6, Issue 4. pp. 351-363.
11. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Timofeeva E. F., Shishenya A. V. Mathematical Models and Computer Simulations. 2013. Vol. 5, Issue 2. pp. 122-129.