Статистическое моделирование многостеночной пластинки из композитного материала

А.Ш. Кусяков

Пермский национальный исследовательский университет, Пермь

Аннотация: Приведены результаты статистического моделирования многостеночной композитной пластины, находящейся под действием сжимающих нагрузок. Получены точечные оценки коэффициентов устойчивости, а также выполнена проверка гипотезы о равенстве коэффициентов устойчивости их теоретическим значениям. Все вычисления проводились в среде пакета MAXIMA. Показано, что распределение коэффициента общей устойчивости практически не отличается от нормального распределения. Коэффициент местной устойчивости имеет незначительную положительную асимметрию и более крутую по сравнению с нормальной кривой вершину. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что разброс физических характеристик материала практически не влияет на величины коэффициентов общей и местной устойчивости.
Ключевые слова: статистическое моделирование, статистическая гипотеза, многостеночная пластинка, устойчивость, критическая нагрузка, композитный материал.

Введение

Конструкции из композитных материалов находят широкое применение в самых различных областях современной техники [1–3]. Возможность управления физическими характеристиками конструкции является одним из основных преимуществ композитных конструкций по сравнению с конструкциями из традиционных материалов. Технологии изготовления, основы расчетов и проектирования композитных конструкций приведены, например, в справочнике [4].

Физические характеристики материала композитных конструкций, в общем случае, являются случайными величинами. Поэтому параметры, подлежащие определению (например, критические нагрузки) также являются случайными величинами. Краткий исторический обзор исследований в области статистических методов в механике композитных материалов приведен в статье [5]. Стохастические подходы в задачах нахождения эффективных упругих характеристик композитных материалов представлены, например, в работах [6, 7].

Задача статистического моделирования, в конечном счете, представляет собой задачу преобразования случайных величин с известными законами распределения. Применительно к рассматриваемому классу задач построение аналитических решений в большинстве случаев невозможно. Поэтому на практике, как правило, используются численные методы. В последние годы наибольшее распространение получил метод Монте–Карло [8]. Подавляющее большинство современных программных комплексов, ориентированных на решение различных инженерных и математических задач, имеют в своем составе пакеты, позволяющие моделировать случайные величины. Например, в систему компьютерной алгебры MAXIMA входит пакет distrib, позволяющий моделировать основные законы распределения случайных величин [9].

Многостеночные пластинки и оболочки из композитного материала, подверженные действию сжимающих нагрузок, находят широкое применение в ракетно-космической технике в качестве несущих элементов конструкций. В статье [10] приведены точечные оценки коэффициента общей устойчивости многостеночной пластины, находящейся под действием сжимающих в плоскости пластины нагрузок. Исходным параметром служил продольный модуль упругости материала конструкции. В качестве выходных величин использовались выборочное среднее, среднее квадратичное отклонение, а также коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Целью настоящей работы является построение точечных оценок коэффициентов как общей, так и местной устойчивости, а также проверка статистических гипотез о равенстве коэффициентов устойчивости их теоретическим значениям. Исходными параметрами служат модули упругости в продольном и поперечном направлениях, а также модуль сдвига материала конструкции.

Постановка задачи

Рассматривается многостеночная пластина, состоящая двух одинаковых многослойных пластин (несущие слои), соединенных набором стенок (рис. 1). Полотно несущего слоя образовано укладкой однонаправленных композитов, а стенка изготовлена из того же материала, что и несущие слои.

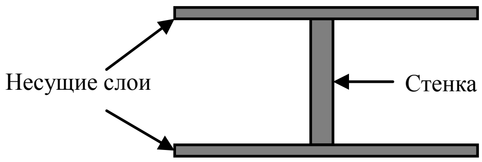

Рис. 1. – Элемент многостеночной пластины

Пластина находится под действием сжимающих нагрузок, равномерно распределенных вдоль противоположных кромок конструкции (рис. 2).

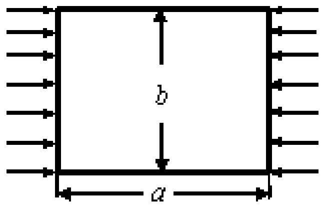

Рис. 2. – Пластина под действием сжимающих нагрузок

Требуется исследовать влияние разброса физических характеристик материала конструкции на коэффициенты общей и местной устойчивости.

Основные расчетные зависимости

Введем обозначения:

a, b – длина и ширина пластинки соответственно;

h_0 – толщина одного несущего слоя;

t_s – расстояние между центрами тяжести стенок;

H_s , B_s – соответственно высота и ширина стенки;

E_1, E_2, ν_{12}, G_{12} – модули Юнга вдоль и поперек волокон, коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала несущих слоев соответственно;

D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G – изгибные жесткости несущего слоя;

E_s– модуль Юнга материала стенок.

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять в предположении, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба. В этом случае критическая нагрузка вычисляется по формуле

$$q_{cr} = D_{xx}^{(p)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 ,$$

где

$$D_{xx}^{(p)} = 8D_{xx} \left(1 + 3\left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3\frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}, \ h_s = \frac{B_s H_s}{t_s}, \ h = 2h_0 .$$

Критическую нагрузку, соответствующую местной форме потери устойчивости полки между стенками, будем вычислять по классической формуле для ортотропной пластинки:

$$q_{crm} = k_s \frac{2\pi^2}{t_s^2} \left(\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G \right), \ k_s = 1 + \frac{E_s h_s}{E_x h} .$$

Здесь k_s– редукционный коэффициент, E_x– модуль Юнга несущих слоев пластины по направлению действия нагрузки.

Статистическое моделирование

Исследуем влияние разброса упругих характеристик на коэффициенты общей и местной форм потери устойчивости многостеночной пластины. Материал несущих слоев и стенок пластины – однонаправленный углепластик, характеристики которого приведены в таблице 1. Предполагается, что плотности распределения вероятностей упругих характеристик подчиняется нормальному закону. Коэффициент Пуассона принимается равным ν_{12}=0,24.

Таблица № 1

Характеристики материала конструкции

Характеристика	E_1	E_2	G_{12}
Математическое ожидание (Па)	$140 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^9$	$2{,}75 \cdot 10^9$
Среднее квадратичное отклонение (Па)	$7 \cdot 10^9$	$0{,}35 \cdot 10^9$	$0{,}14 \cdot 10^9$

Конструкция находится под действием равномерно распределенной по кромкам пластины сжимающей нагрузке q=2·10^5 н/м. Геометрические характеристики пластины: h=0,0024 м; h_s=0,0036 м; t_s=0,0528 м; H_s=0,0118 м.

Коэффициент устойчивости η будем определять, как отношение критической нагрузки к заданной нагрузке. Статистическое моделирования осуществлялось в среде пакета MAXIMA. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

Таблица № 2

Результаты статистического моделирования

Коэффициенты устойчивости	Выборочное среднее	Среднее квадратичное отклонение	Коэффициент асимметрии	Коэффициент эксцесса
η_{cr}	1,00	0,05	-0,05	-0,05
η_{crm}	1,00	0,03	0,08	0,15

Здесь η_{cr}, η_{crm} – коэффициенты общей и местной форм потери устойчивости соответственно.

Таким образом, конструкция является равноустойчивой по общей и местной формам потери устойчивости. Коэффициент общей устойчивости имеет распределение, которое практически не отличается от нормального распределения. Гистограмма распределения относительных частот w коэффициента общей устойчивости представлена на рис.3.

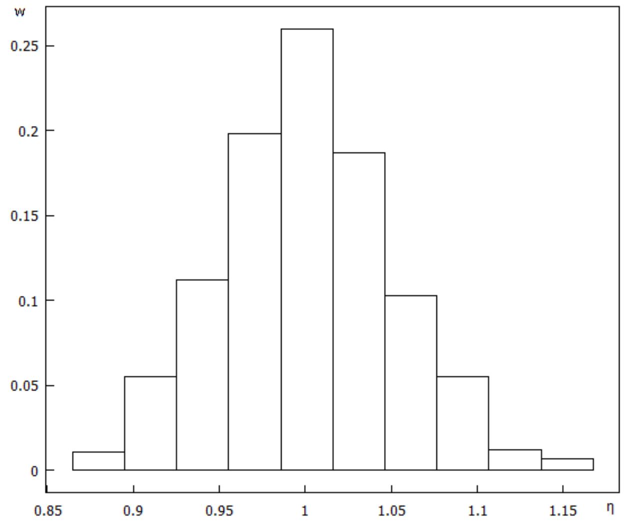

Рис. 3. – Распределение относительных частот коэффициента η_{cr}

Коэффициент местной устойчивости имеет незначительную положительную асимметрию и более крутую по сравнению с нормальной кривой вершину. Гистограмма распределения относительных частот *w* коэффициента местной устойчивости представлена на рис.4.

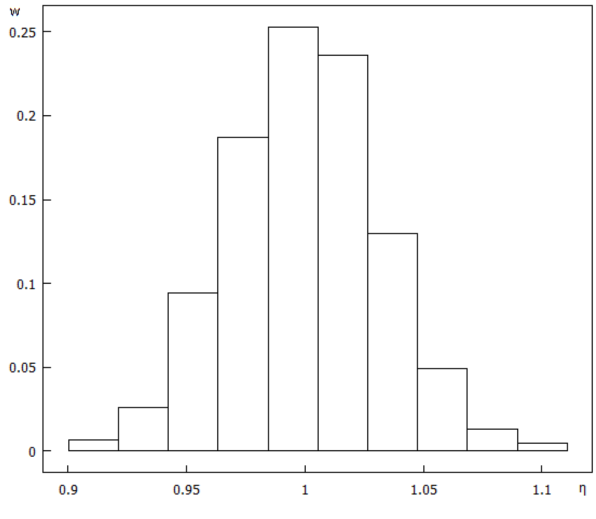

Рис. 4. – Распределение относительных частот коэффициента η_{crm}

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о равенстве коэффициентов устойчивости η их теоретическим значениям. Проверим нулевую гипотезу H_0: η=1, приняв в качестве альтернативной гипотезы H_1: η<1. Уровень значимости примем равным α=0,05. Пусть статистика *z* коэффициентов устойчивости распределена по нормальному закону. Обозначим через $z_{набл}$ наблюдаемое значение статистики, а через $z_{кр}$ критическое значение статистики. Если величина $z_{набл}$ удовлетворяет условию $z_{набл} > -z_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае эта гипотеза отвергается. Для решения задачи используем, как и ранее, пакет MAXIMA. Результаты расчетов для общей и местной форм потери устойчивости приведены в таблице 3.

Таблица № 3

Результаты проверки статистических гипотез

Форма потери устойчивости	Наблюдаемое значение $z_{набл}$	Критическое значение $z_{кр}$	Нулевая гипотеза H_0
Общая	-0,557	1,082	Принимается
Местная	-0,313	1,052	Принимается

Таким образом, в обоих случаях условие $z_{набл} > -z_{кр.}$ выполняется, т.е. гипотеза о равенстве коэффициентов устойчивости их теоретическим значениям принимается.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что разброс физических характеристик материала конструкции практически не влияет на величины коэффициентов общей и местной устойчивости многостеночной пластинки.

Литература

1. Зорин В. А. Опыт применения композиционных материалов в изделиях авиационной и ракетно-космической техники (Обзор) // Конструкции из композиционных материалов. 2011. № 4. С. 44-59.

2. Польской П. П., Маилян Д. Р. Композитные материалы – как основа эффективности в строительстве и реконструкции зданий и сооружений // Инженерный вестник Дона, 2012. № 4-2.URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1307.

3. Маилян Д. Р., Польский П.П. Прочность и деформативность усиленных композитными материалами балок при различных варьируемых факторах // Инженерный вестник Дона, 2013. № 2.URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1676.

4. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Васильева В.В., Тарнопольского Ю.М. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

5. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Малий Д. В. Роль математики в развитии механики композиционных материалов / // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 3(71). С. 430-439.

6. Buryachenko V. Micromechanics of heterogeneous materials. – New York: Springer, 2007. 686 p.

7. Saheli G., Garmestani H., Adams B.L. Microstructure design of a two phase composite using two-point correlation functions // Journal of Computer-Aided Materials Design. 2004. Vol. 11. P. 103–115.

8. Соболь И. М. Метод Монте-Карло / М. : Наука, 1978. 64 с.

9. Maxima.URL: maxima.sourceforge.net.

10. Кусяков А.Ш. Анализ оптимальных многостеночных пластин // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2022. Вып. 54. С. 24 – 31.

References

1. Zorin V. A. Konstrukcii iz kompozicionnyh materialov. 2011. № 4. pp. 44-59.

2. Pol'skoj P. P., Mailjan D. R. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, № 4-2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1307.

3. Mailjan D. R., Pol'skij P.P. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1676.

4. Kompozicionnye materialy: Spravochnik [Composite materials: Handbook]. Pod red. Vasil'eva V.V., Tarnopol'skogo Ju.M. M.: Mashinostroenie, 1990. 512 p.

5. Arhipov I. K., Abramova V. I., Gvozdev A. E., Malij D. V. Chebyshevskij sbornik. 2019. T. 20, № 3(71). pp. 430-439.

6. Buryachenko V. Micromechanics of heterogeneous materials. New York: Springer, 2007. 686 p.

7. Saheli G., Garmestani H., Adams B.L. Journal of Computer-Aided Materials Design. 2004. Vol. 11. pp. 103–115.

8. Sobol' I. M. Metod Monte-Karlo [Monte-Carlo Method]. M. : Nauka, 1978. 64 p.

9. Maxima.URL: maxima.sourceforge.net/.

10. Kusyakov A.Sh. Problemy mehaniki i upravlenija. Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm. gos. nac. issl. un-t. Perm', 2022. Vyp. 54. pp. 24 – 31.