

## Динамический способ формирования классов при решении задачи «грубого» ранжирования

*А.Г.Коротченко, Н.Н.Чернышова*

*Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского*

**Аннотация:** Предлагается динамический способ формирования классов при решении задачи «грубого» ранжирования. При этом под «грубым» ранжированием понимается разбиение элементов конечного множества на классы «равноценных» элементов и их линейное упорядочение.

**Ключевые слова:** конечное множество, отношение предпочтения, булева матрица, факторизация отношения, принцип «грубого» ранжирования.

В задачах принятия решений нередко возникает ситуация, когда целевые функции не представлены в виде явных функциональных зависимостей на множестве допустимых альтернатив (объектов), а задается отношение предпочтения на этом множестве, то есть имеется возможность только попарного сравнения объектов.

При этом возникает задача выделения некоторого подмножества исходного множества, элементы которого назовем предпочтительными, либо выделения нескольких подмножеств (классов) с их дальнейшим упорядочиванием. Попарное сравнение объектов не позволяет провести такое выделение подмножеств или классов непосредственно. Поэтому возникает необходимость иметь некоторые принципы, позволяющие выделять такие подмножества. К числу таких принципов, например, относятся принципы недоминируемости, Неймана – Моргенштерна, ранжирования [1,2,3].

В данной работе рассматривается принцип «грубого» ранжирования, состоящий в выделении классов объектов и их линейном упорядочивании для случая, когда исходное отношение является линейным и нетранзитивным [4-8].

Такие задачи возникают в различных предметных областях [9-13]. Например, рассмотрим ВУЗ, который имеет несколько филиалов. Каждый филиал характеризуется набором числовых показателей. Вводится решающее правило, позволяющее преобразовать числовые показатели в отношения предпочтения на множестве филиалов. Деятельность группы филиалов, оказавшихся в «худшем» классе, подлежит особому контролю. Данная задача может быть интересна при осуществлении текущего мониторинга деятельности филиалов ВУЗом.

Другим примером может быть задача, связанная с рассмотрением группы товаров (модели телефонов, автомобилей, IT – техники), каждый из которых описывается набором числовых характеристик. После введения решающего правила получаем отношения предпочтения на множестве товаров. Интерес вызывает группа товаров, попавших в «лучший» класс.

Пусть  $\rho$  – линейное бинарное отношение предпочтения, введенное на конечном множестве  $A$ . Отношение предпочтения может вводиться путем задания решающего правила, если каждый элемент  $a \in A$  характеризуется конечным набором показателей. Некоторые способы введения такого рода отношений описаны в [1]. Под ранжированием объектов понимается расположение их в цепочку по убыванию их ценности или важности. При ранжировании допускается наличие «равноценных» объектов. Тогда элементы множества  $A$  разбиваются на классы равноценных объектов и эти классы располагаются в соответствующую цепочку. На языке бинарных отношений введение ранжирования объектов множества означает введение на нем отношения квазипорядка. Если отношение  $\rho$  – транзитивно, то оно является линейным отношением квазипорядка. Тогда, построив диаграмму квазиупорядоченного множества, мы получим ранжирование объектов из множества  $A$ . Если же отношение  $\rho$  – нетранзитивно, то это может свидетельствовать о наличии контуров в графе  $(A, \rho)$  [1]. Тогда для

---

построения «грубого» ранжирования множество  $A$  разбивается на классы отношения взаимной достижимости  $\bar{\rho}$  в графе  $(A, \rho)$ . При этом каждому классу эквивалентности  $\bar{\rho}$  будет соответствовать свой контур в графе  $(A, \rho)$ . В качестве же линейного упорядочения этих классов выбирается факторизация этого отношения по эквивалентности  $\bar{\rho}$ .

Пусть  $\rho$  - линейное нетранзитивное отношение на множестве  $A$ , состоящем из  $(n + 1)$ -ого элемента, а  $\bar{\rho}$  - его отношение взаимной достижимости. Будем считать, что отношение  $\rho$  задано булевой матрицей  $M$  размерности  $(n + 1) * (n + 1)$ . Тогда, согласно [1,14], алгоритм выделения контуров графа  $(A, \rho)$  состоит в построении отношения  $\rho^n$  и соответствующей ему булевой матрицы  $M^n$  ( $n$ -ой степени матрицы), где при перемножении матриц вместо обычного сложения используют булево сложение. При этом каждый класс эквивалентности  $\bar{\rho}$  состоит из элементов, которым соответствуют одинаковые строки матрицы  $M^n$ , а любые два элемента класса эквивалентности  $\bar{\rho}$  принадлежат одному контуру графа  $(A, \rho)$ . Отметим, что если для  $k < n$  выполнено условие  $M^k = M^{k+1}$ , то  $M^n = M^k$  и матрица  $M^n$  найдена.

Ясно, что при перемножении соответствующей строки и соответствующего столбца двух булевых матриц в получающейся сумме возникает первая единица, то результат будет равен единице.

Представление отношений в виде булевых матриц не всегда является удобным. Введем так называемое  $L$  - интервальное представление булевой матрицы  $M$ , учитывающее только вхождение единиц в каждую строку этой матрицы.  $L$  - интервальное представление матрицы  $M$  обозначим через  $L(M)$ . В качестве разделителя информации о строках в  $L(M)$  будем использовать номер строки. Каждая строка матрицы  $M$  рассматривается как совокупность последовательностей из подряд идущих единиц. Размеры последовательностей могут изменяться от 1 до  $(n + 1)$ . Каждая строка

$L(M)$  будет определяться интервалами вида  $(g_i, p_i)$ , где  $g_i$  и  $p_i$  – натуральные числа, отражающие информацию об индексах начала и конца  $i$ -ой последовательности. Поясним  $L$  – интервальное представление, на примере.

Пусть отношение  $\rho$  таково, что его булева матрица  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Учитывая введенную структуру, запишем интервальное представление  $L(M): [(1,2)(4,4)(6,6)1(2,2)(4,6)2(1,6)3(4,6)4(1,1)(5,6)5(4,4)(6,6)6]$

Как было сказано выше, при выполнении условия  $M^k = M^{k+1}$ ,  $k < n$ , матрицу  $M^n$  можно считать построенной и для выделения классов отношения  $\bar{\rho}$  нужно определить одинаковые строки этой матрицы. Заметим теперь, что одинаковые строки могут появляться уже в матрице  $M^i$ ,  $2 \leq i < k$ . Будем учитывать этот факт при динамическом формировании классов отношения  $\bar{\rho}$ , рассматривая на  $i$ -ом шаге алгоритма матрицу  $\tilde{M}_i$ , которая получается из матрицы  $i$ -ой итерации путем удаления ее одинаковых строк. На первой итерации  $\tilde{M}_1 = M$ . Таким образом на следующем  $(i + 1)$ -м шаге будет использоваться матрица  $\tilde{M}_i * M$  и из нее, как было описано выше, будет сформирована матрица  $\tilde{M}_{i+1}$ . Итерационный процесс заканчивается при получении матрицы  $\tilde{M}_n$ , либо, когда  $\tilde{M}_k = \tilde{M}_{k+1}$ ,  $k < n$ , либо, когда  $\tilde{M}_k$  не содержит ни одного элемента. Для реализации описанной процедуры при вычислении матрицы  $\tilde{M}_i * M$  можно использовать булево произведение этих матриц (где обычное сложение заменяется на булево) и затем переходить к  $L$ -интервальному представлению полученной матрицы  $L(\tilde{M}_i * M)$ . Можно

также воспользоваться  $L$ -интервальным представлением матрицы  $\tilde{M}_i: (L(\tilde{M}_i))$  и аналогичным  $L$ -интервальному представлению матрицы  $M$  ее  $L_1$ -интервальным представлением  $L_1(M)$ , где вместо строк матрицы используются ее столбцы, и находить  $L(\tilde{M}_i * M)$  непосредственно с использованием  $L(\tilde{M}_i)$  и  $L_1(M)$ .

При этом будем последовательно формировать классы  $G_r(i)$ , где  $i$  - номер шага алгоритма,  $r$  - номер класса, формируемого на шаге  $i$  ( $r = 1, 2, \dots, s$ ). Здесь  $s$  - число классов на  $i$  шаге. Индексы одинаковых строк матрицы  $\tilde{M}_i$  будут образовывать класс  $G_r(i)$ . Классы отношения  $\bar{r}$  будут построены, когда выполнится условие окончания итерационного процесса.

С учетом изложенной процедуры справедливо

Утверждение: Для каждого класса  $i$  - ой итерации существует содержащий его класс  $(i + 1)$ - ой итерации.

Информацию о вычеркнутых строках и их номерах будем сохранять в «шаблоне» класса. «Шаблон» класса  $G_r(i)$  будем обозначать через  $S_r(i)$ . «Шаблон» класса есть результат умножения подстроки  $L$  - интервального представления матрицы  $\tilde{M}_i$ , соответствующей элементам этого класса, на матрицу  $M$ . Так как на одной итерации может сформироваться несколько классов, то у каждого из них будет свой «шаблон». «Шаблоны» для одноэлементных классов в ходе итерационного процесса не строятся.

**Пример 1.** Рассмотрим динамическую процедуру формирования классов на примере ранее приведенной матрицы  $M$ .

Итерация 1. Запишем  $L(M)$ :

$$[(1,2)(4,4)(6,6)1(2,2)(4,6)2(1,6)3(4,6)4(1,1)(5,6)5(4,4)(6,6)6]$$

Напомним, что  $\tilde{M}_1 = M$  и, следовательно,  $L(\tilde{M}_1) = L(M)$ .

Итерация 2:

$$L(\tilde{M}_1 * M) = [(1,2)(4,6)1(1,2)(4,6)2(1,6)3(1,2)(4,6)4(1,2)(4,6)5(1,1)(4,6)6].$$

В получившейся матрице первая, вторая и пятая строки совпадают. Это означает, что объекты исследования с перечисленными номерами попадают в один класс:  $G_1(2) = \{1,2,5\}$ . Сформируем «шаблон» класса  $S_1(2): [(1,2)(4,6)1,2,5]$ . Вычеркиваем из матрицы  $\tilde{M}_1 * M$  первую, вторую и пятую строки, тем самым получая матрицу  $\tilde{M}_2$ . Тогда интервальное представление для оставшейся подматрицы  $L(\tilde{M}_2)$  записывается следующим образом:  $[(1,6)3(1,1)(4,6)4(4,6)6]$ .

Итерация 3:  $L(\tilde{M}_2 * M) = [(1,6)3(1,2)(4,6)4(1,1)(4,6)6]$ . Сравнивая информацию строк полученного интервального представления с информацией строк «шаблона», видим, что на второй итерации в класс добавляется еще один элемент:  $G_1(3) = \{1,2,5,4\}$ . Четвертую строку вычеркиваем из матрицы  $\tilde{M}_2 * M$ . Корректируем «шаблон» класса  $G_1(3)$  и получаем  $S_1(3): [(1,2)(4,6)1,2,5,4]$ .  $L(\tilde{M}_3)$  записывается следующим образом:  $[(1,6)3(1,1)(4,6)6]$ .

Итерация 4:  $L(\tilde{M}_3 * M) = [(1,6)3(1,2)(4,6)6]$ .

Добавляем новый элемент в класс, изменяем «шаблон» и вычеркиваем шестую строку из матрицы  $\tilde{M}_3 * M$ . «Шаблон» класса  $G_1(4)$  примет вид  $S_1(4): [(1,2)(4,6)1,2,5,4,6]$ . Интервальное представление для оставшейся подматрицы  $L(\tilde{M}_4)$  записывается следующим образом:  $[(1,6)3]$ . Итерационный процесс закончен. К концу итерационной процедуры сформировались два класса  $G_1(4) = \{1,2,5,4,6\}$  и одноэлементный класс  $G_2(4) = \{3\}$ .

Рассмотрим **пример 2**. Пусть матрица  $M$  изначально задается своим  $L$  – интервальным представлением:

$[(1,2)(9,9)1(1,2)2(1,3)(5,10)3((1,9)4(1,2)(5,7)(9,9)5(1,2)(6,7)(9,9)6(1,2)(5,5)(7,7)(9,9)7(1,2)(4,10)8(1,2)(9,9)9(1,2)(4,7)(9,10)10]$

Итерация 1:  $L(\tilde{M}_1) = L(M)$ .

Итерация 2:  $L(\tilde{M}_1 * M)$  имеет вид:

$[(1,2)(9,9)1(1,2)(9,9)2(1,10)3(1,10)4(1,2)(5,7)(9,9)5(1,2)(5,7)(9,9)6(1,2)$   
 $(5,7)(9,9)7(1,10)8(1,2)(9,9)9(1,10)]$

Строки третья, четвертая, восьмая и десятая образовали класс  $G_1(2) = \{3,4,8,10\}$  с «шаблоном»  $S_1(2):[(1,10)3,4,8,10]$ . Вычеркиваем эти строки из матрицы  $\tilde{M}_1 * M$ . Строки пятая, шестая и седьмая образовали класс  $G_2(2) = \{5,6,7\}$  с «шаблоном»  $S_2(2):[(1,2)(5,7)(9,9)5,6,7]$ . Вычеркиваем эти строки из матрицы  $\tilde{M}_1 * M$ . Строки первая, вторая и девятая образовали класс  $G_3(2) = \{1,2,9\}$  с «шаблоном»  $S_3(2):[(1,2)(9,9)1,2,9]$ . Вычеркиваем эти строки из матрицы  $\tilde{M}_1 * M$ . Таким образом в матрице  $\tilde{M}_2$  не осталось строк. Итерационный процесс закончен.

Первый пример иллюстрирует постепенное (динамическое) формирование классов эквивалентности, когда классы пополняются новыми элементами на каждом шаге итерационного процесса. Второй пример показывает, что процедура формирования классов может произойти быстро, на начальных итерациях.

Отметим некоторые преимущества динамического способа формирования классов эквивалентности. На каждом шаге итерационного процесса строится матрица  $\tilde{M}_i$ , которая при наличии одинаковых строк в матрице  $M_i$ , имеет меньшую размерность. Следовательно, уменьшается количество вычислений при определении произведения матриц  $\tilde{M}_i$  на  $M$ .

$L$  – интервальное представление матриц с каждой итерацией укорачиваются. Имея «шаблоны» классов, легко по  $L$  – интервальному представлению производить операцию добавления элемента в уже сформированный на предыдущей итерации класс.

Описанную итерационную процедуру можно не проводить до конца, а прервать на любом шаге итерационного процесса. При этом в множестве «шаблонов» будет храниться вся информация об уже сформированных к



моменту останова подклассах. Данное обстоятельство можно учитывать в случае существования дополнительной информации об элементах класса отношения взаимной достижимости. Например, в исходном множестве  $A$  есть выделенный элемент  $a^*$  и представляет интерес отыскание хотя бы еще одного элемента  $b \in A$ , который будет находиться в одном классе с  $a^*$ .

Вышеизложенная процедура была положена в основу программного комплекса, написанного на языке C#. Данный комплекс позволяет решать задачи формирования классов эквивалентности и их линейного упорядочения для различных предметных областей.

### Литература

1. Розен В.В. Цель-оптимальность-решение. М.: Радио и связь, 1982. 168 с.
2. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 707 с.
3. Tversky A. Kahneman D. Rational choice and framing decisions// Journal of business. 1986. № 59. pp.251-278
4. Tversky A. Intransitivity of preferences. Psychological review. 1969. pp. 31-48
5. Блюмбер В.А. Какое решение лучше? Метод расстановки приоритетов. Ленинград: Лениздат, 1982. 160 с.
6. Поддьяков А. Н. Непереходность (нетранзитивность) отношений превосходства и принятие решений // Психология. Журн. ВШЭ. 2006. № 3. С. 111.
7. Поддьяков А. Н. Нетранзитивность превосходства при взаимодействиях: Междисциплинарный анализ. М.: Феникс, 2006. С.182.



8. Поддьяков А. Н. Развитие понимания транзитивности и нетранзитивности отношения превосходства // III междунар. конф. по когнитив. науке : тез. докл. В 2 т. Москва. 2008. Т. 2. С. 414–416.
9. Пестерев П.В., Дьяконов Д.В., Рудюк А.П., Янишевская А.Г. Влияние факторов ранжирования на позиции сайтов в поисковых системах // Инженерный вестник Дона. 2014. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2729
10. Коржакова С.А. Концептуальный уровень решения задачи анализа автоматизации социальной мобильности // Cyberleninka URL: //cyberleninka.ru/article/n/kontseptualnyy-uroven-resheniya-zadachi-avtomatizatsii-analiza-sotsialnoy-mobilnosti(дата обращения: 17.03.2015)
11. Алешин С.П., Бородина Е.А. Нейросетевое распознавание классов в режиме реального времени // Инженерный вестник Дона 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1494
12. Nelyubin A., Podinovskiy V. Algorithmic decision rule using ordinal criteria importance coefficients with a first ordinal metric scale // Comput. Math. Math. Phys. 2012. № 1. pp. 43–59.
13. Podinovskiy V. Using interval information on relative criteria tradeoffs in analyzing multicriterial decision making problems // Autom. Remote Control. 2010. Т. 71. № 8. pp. 1648–1660.
14. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга. 2004. С. 664.

### References

1. Rozen V.V. Cel'-optimal'nost'-reshenie [Purpose-optimality-solution]. М.: Radio isvjaz', 1982. p.168.
2. Fon Nejman Dzh., Morgenshtern O. Teorija i grijekonomicheskoe povedenie [Theory of games and economic behavior]. М.: Nauka, 1970. P.707.

3. Tversky A., Kahneman D. Rational choice and framing decisions. Journal of business. 1986. № 59. P. 251-278
  4. Tversky A. Intransitivity of preferences. Psychological review. 1969. PP. 31-48
  5. Bljumber V.A. Kakoe reshenie luchshe? Metod rasstanovki prioritetov [What solution is better? A prioritization method]. Leningrad :Lenizdat, 1982. P.160.
  6. Podd'jakov A. N. Neperehodnost' (netranzitivnost') otnoshenij prevoshodstva i prinjatie reshenij. Psihologija. Zhurn. VShJe. 2006. № 3. P. 111.
  7. Podd'jakov A. N. Netranzitivnost' prevoshodstva pri vzaimodejstvijah: Mezhdisciplinarnyj analiz [Intransitive excellence in interactions: interdisciplinary analysis]. M. : Feniks, 2006. P.182.
  8. Podd'jakov A. N. Razvitie ponimaniya tranzitivnosti i netranzitivnosti otnoshenija prevoshodstva. III mezhdunar. konf. pokognitiv. nauke : tez. dokl. V 2 t. Moskva. 2008. T. 2. P. 414–416.
  9. Pesterev P.V., D'jakonov D.V., Rudjuk A.P., Janishevskaja A.G. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2014. №4. URL:<http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N4y2014/2729>
  10. Korzhakova S.A. Konceptual'nyj uroven' reshenija zadachi analiza avtomatizacii social'noj mobil'nosti. Cyberleninka URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/kontseptualnyy-uroven-resheniya-zadachi-avtomatizatsii-analiza-sotsialnoy-mobilnosti>(data obrashhenija: 17.03.2015)
  11. Aleshin S.P., Borodina E.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №1. URL:[ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1494](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1494)
  12. Nelyubin A., Podinovskiy V. Algorithmic decision rule using ordinal criteria importance coefficients with a first ordinal metric scale. Comput. Math. Math. Phys. 2012. № 1. PP. 43–59.
-



13. Podinovskiy V. Using interval information on relative criteria tradeoffs in analyzing multicriterial decision making problems. Autom. Remote Control. 2010. Т. 71. № 8. PP. 1648–1660.
14. Zykov A.A. Osnovy teorii grafov [Basics of graph theory]. М.: Vuzovskaja kniga. 2004. P. 664.