

## Универсальные формулы для определения расчетной длины элементов крестовой решетки

*А.А. Лиманцев*

*Донской государственной технической университет, г. Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** Рассмотрен процесс нахождения расчетных длин элементов крестовой решетки с помощью метода перемещений в случае, когда оба стержня не прерываются и когда один из стержней прерывается и перекрывается фасонкой. Предложены новые формулы метода перемещений для нахождения опорных реакций элемента, имеющего пружинное закрепление на одном из концов. Предложена формула, позволяющая определить жесткость пружины, с помощью которой моделируется работа соединительной планки. Произведено сравнение двух вариантов расчета: с применением обычных формул метода перемещений и с применением предлагаемых новых формул. Расчет показал хорошую сходимость результатов при существенном упрощении процесса расчета во втором случае. Приведено сравнение полученных расчетных длин с указаниями действующих сводов правил. Отмечена возможность принять более экономичное сечение при определении расчетной длины по средствам метода перемещений.

**Ключевые слова:** Расчетная длина, крестовая решетка, устойчивость, критическая сила, стропильная ферма.

Проектировщикам известно множество различных способов определить расчётную длину сжатого стержня для последующей оценки его устойчивости. Наиболее распространённый вариант — воспользоваться таблицами коэффициентов расчетных длин, которые приведены в сводах Правил (СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» и СП 294.1325800.2017 «Конструкции стальные. правила проектирования»). Этого оказывается вполне достаточно для решения подавляющего большинства возникающих на практике случаев. При необходимости рассмотрения устойчивости какой-либо стержневой системы на выручку приходят программные комплексы, позволяющие рассмотреть абсолютно любой случай и найти приближающиеся к точным решения, как описано в [1, 2], а также в статьях [3, 4]. Ну и наконец, существуют способы ручного расчёта, среди которых наиболее удобным является метод деформаций, который подробно описан в [5-7]. В настоящее время ручной расчёт может показаться неактуальным, однако

---

для изучения какой-либо конструкции при различных сочетаниях жесткостей, длин и усилий, а также при использовании математического пакета программ для автоматизации процесса, такой способ оказывается удобным и максимально гибким [8]. Целью настоящей работы является попытка расширить возможности и удобство расчета на устойчивость стержневых систем методом деформаций.

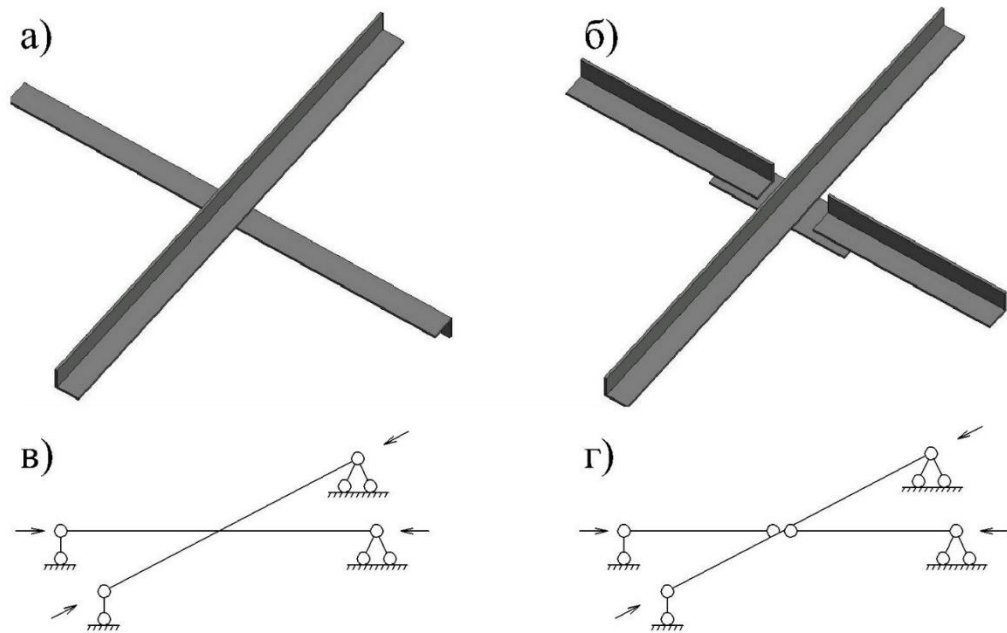


Рис. 1. Два варианта выполнения крестовой решетки.

В качестве конструкции, на примере которой будут вестись дальнейшие рассуждения, рассмотрим систему из двух перекрестных стержней, нагруженных осевыми силами. Данный пример выбран по той причине, что в реальности такая система может состоять из двух неразрывных стержней (рис. 1, а), либо из одного целого стержня и второго, поделенного на две части, соединённые накладкой (рис. 1, б). В расчетной схеме каждый стержень делится на два точки их взаимного пересечения. В случае непрерывных стержней схема будет состоять из четырех элементов с жестким сопряжением между собой и шарнирами на опертых концах (рис. 1, в). Когда один из стержней разорван, он представляется в виде двух элементов с шарнирами на обоих концах (рис. 1, г).

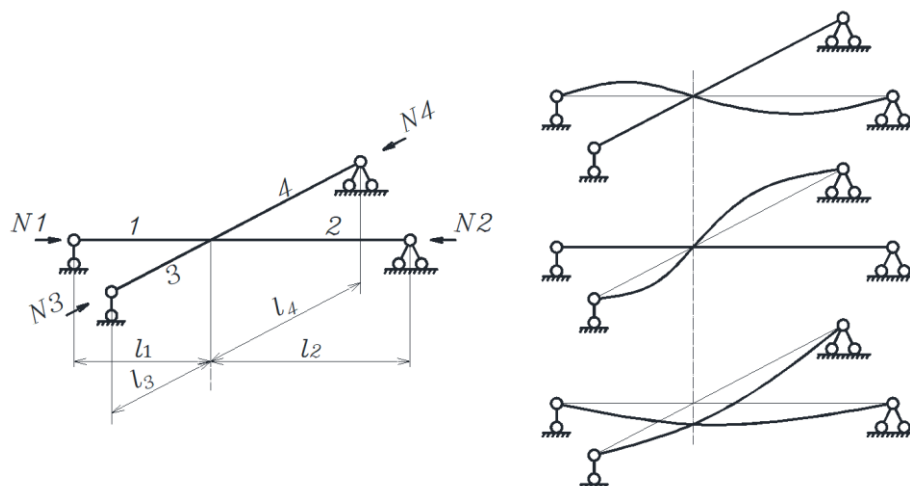


Рис. 2. Расчетная схема.

На рис. 2 представлена общая схема первого случая рассматриваемой системы и возможные формы её потери устойчивости. Практическую ценность имеет третья форма, где происходит смещение точки пересечения стержней [7, 9].

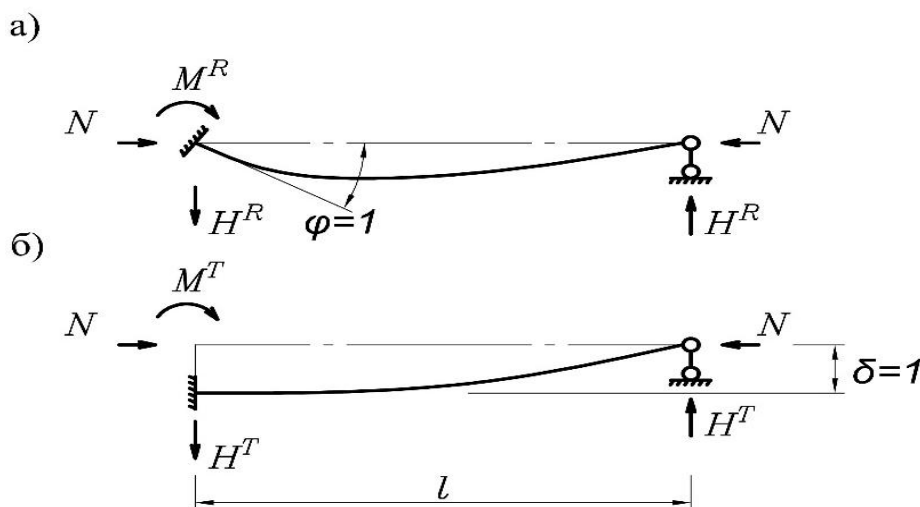


Рис. 3. Расчетная схема единичных деформаций однопролетного стержня вида «заделка+шарнир».

Для решения такой задачи, в случае, когда стержни в точке пересечения не прерываются, метод деформаций предоставляет формулы (1-4) для реакций от единичных перемещений (рис. 3).

Опорные реакции для расчетной схемы на рис. 3, а:

$$M^R = \frac{E I}{l} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u}; \quad (1)$$

$$H^R = \frac{E I}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u} . \quad (2)$$

Опорные реакции для расчетной схемы на рис. 3, б:

$$M^T = \frac{E I}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u} \cdot \delta ; \quad (3)$$

$$H^T = \frac{E I}{l^3} \cdot \frac{u^3 \cos u}{\sin u - u \cos u} \cdot \delta . \quad (4)$$

В приведенных выше формулах  $u$  – аргумент стержня, характеризующий его длину, жесткость и сжимающую силу, равный:

$$u = \sqrt{\frac{N}{E I}} l .$$

Опорные реакции от единичных деформаций для двухшарнирного элемента (рис. 4) определяются по формулам (5-8).

Опорные реакции для расчетной схемы на рис. 2, а:

$$M^R = 0 ; \quad (5)$$

$$H^R = 0 . \quad (6)$$

Опорные реакции для расчетной схемы на рис. 2, б:

$$M^T = 0 ; \quad (7)$$

$$H^T = \frac{N}{l} . \quad (8)$$

Расчетные схемы, представленные на рис. 3 и 4, можно заменить единой универсальной схемой, представленной на рис. 5.

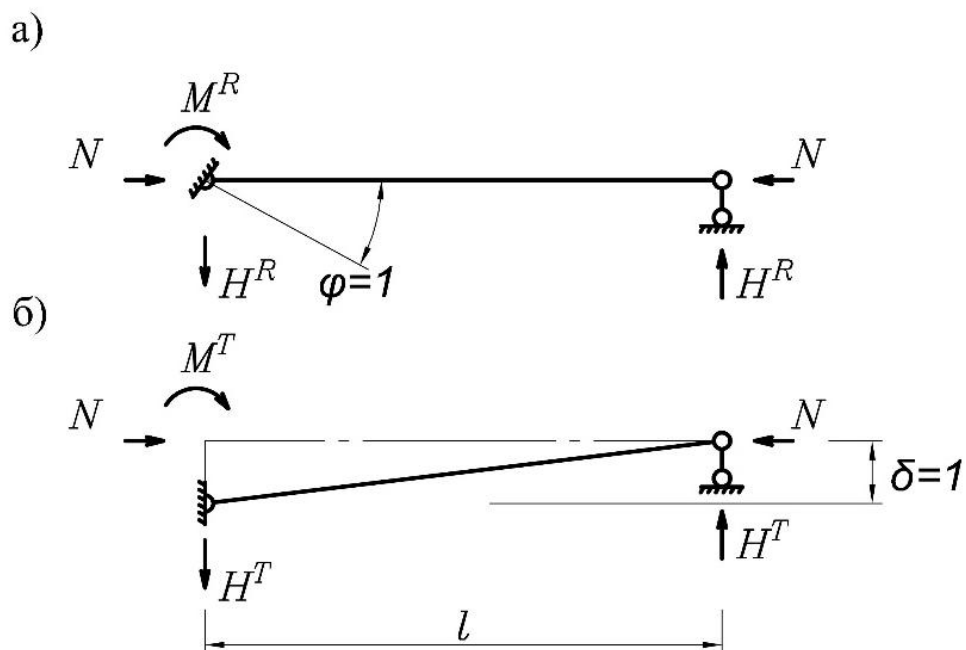


Рис. 4 Расчетная схема единичных деформаций однопролетного двухшарнирного стержня.

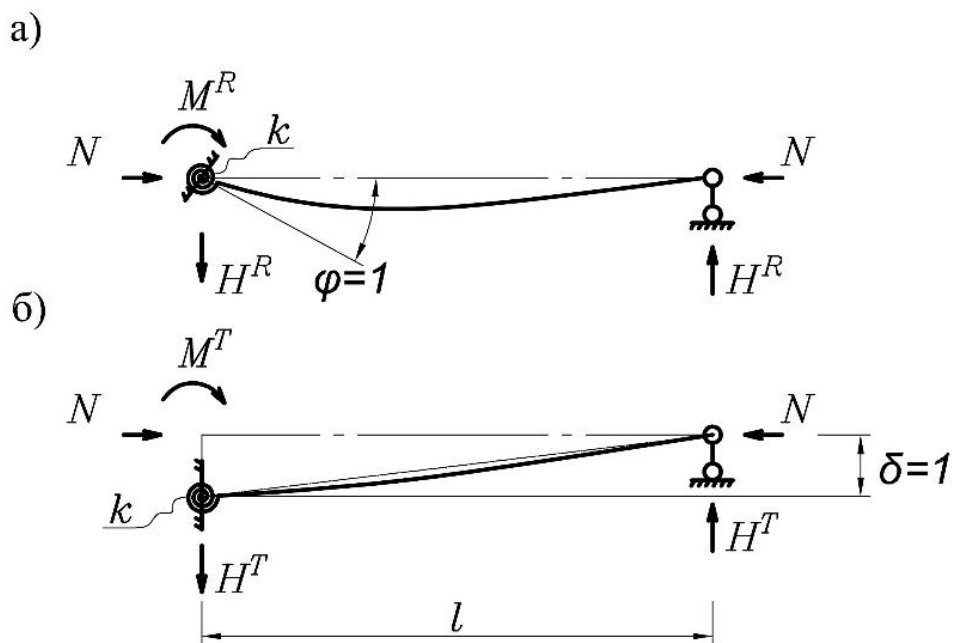


Рис. 5. Расчетная схема единичных деформаций однопролетного стержня вида «пружина+шарнир».

Процесс вывода формул метода деформаций подробно описан в [7, 10]. Приведем здесь лишь основные моменты. Определение реакций основной системы основано на интегрировании дифференциального уравнения изгиба.

$$y = C_1 + C_2x + C_3 \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2} + C_4 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}.$$

Чтобы найти все постоянные интегрирования, необходимо задать 4 граничных условия. Найдем граничные условия для схемы на рис. 5, а. Прогиб на обоих концах стержня равен нулю, следовательно  $y(0) = 0, y(l) = 0$ . Изгибающий момент на правом конце также равен нулю, поэтому  $y''(l) = 0$ .

Отыщем последнее граничное условие. Узел в точке  $x = 0$  испытывает поворот  $\varphi = 1$ . Одна часть угла поворота узла обуславливается изгибом самого стержня, а другая – деформацией пружины, при этом угол поворота пружины равен отношению изгибающего момента и её жесткости. Рассуждая таким образом, получаем следующее уравнение:

$$\frac{-EIy''(0)}{k} + y'(0) = 1.$$

В результате опорные реакции для расчетной схемы на рис. 5, а получаются следующими:

$$M^R = \frac{EI}{l} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u + \frac{Nl \sin u}{k}}; \quad (9)$$

$$H^R = \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u + \frac{Nl \sin u}{k}}. \quad (10)$$

Найдем граничные условия для схемы на рис. 5, б. На левом конце стержня прогиб равен нулю, поэтому  $y(0) = 0$ . На правом конце прогиб равен единице, следовательно  $y(l) = 1$ , а изгибающий момент равен нулю –  $y''(l) = 0$ . Для определения последнего

граничного условия необходимо определить момент на левом конце стержня. Он может быть найден двумя способами:

$$M(0) = EIy''(0); M(0) = ky'(0).$$

Отсюда, приравнявая правые части уравнений, получаем условие:

$$EIy''(0) - ky'(0) = 0.$$

Опорные реакции для расчетной схемы на рис. 5 б):

$$M^T = \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{u^2 \sin u}{\sin u - u \cos u + \frac{Nl \sin u}{k}}; \quad (11)$$

$$H^T = \frac{EI}{l^3} \cdot \frac{u^3 \cos u}{\sin u - u \cos u + \frac{Nl \sin u}{k}} - \frac{N^2 \sin u}{k(\sin u - u \cos u) + Nl \sin u}. \quad (12)$$

Нужно обратить внимание, что формула (12) состоит из двух слагаемых. Первая часть соответствует реакции в опоре, возникающей вследствие изгиба стержня. Вторая часть представляет собой проекцию сжимающего усилия в стержне на вертикальную ось в точке опоры и определяется как  $N \cdot \sin(\alpha)$ . В виду малости углов получаем  $\sin(\alpha) = \alpha = y'(0)$ .

Универсальные выражения (9-12) при жесткости  $k \rightarrow \infty$  преобразуются к виду (1-4), а при  $k \rightarrow 0$  к формулам (5-8). В случае упругого защемления в расчет можно включать конкретные значения жесткости пружины и получать более точные решения.

Как уже было описано выше, в рассматриваемой на рис. 1, б перекрестной решетке в качестве пружины выступает соединительная фасонка. Для того чтобы определить её жесткость, представим фасонку в виде консольного стержня (рис. б).

Жесткость пружины  $k$  определяется как отношение момента к углу закручивания. Поэтому, если найти зависимость  $\alpha$  от  $M_0$ , то получим формулу для нахождения жесткости пружины  $k$ . Важно отметить что длина рассмотренного элемента должна быть как минимум на порядок меньше длины основного стержня, что дает нам право с некоторым приближением, но достаточно точно для технических расчетов заменять данный стержень пружинной.

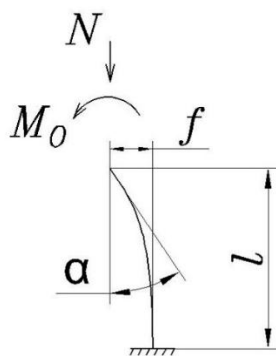


Рис. 6. К определению жесткости пружины.

Определение деформаций сжато-изогнутого стержня подробно описано в [7]. Уравнение изогнутой оси стержня, показанного на рис. 6, будет иметь вид:

$$y = \frac{M_0}{N} \cdot \frac{\sin(2al - ax) - \sin 2al + \sin ax}{\sin 2al}.$$

Беря первую производную, отыщем угол поворота  $\alpha$  свободного конца стержня, с помощью которого определим жесткость пружины:

$$k = \frac{N \sin 2al}{a - a \cos 2al}. \quad (13)$$

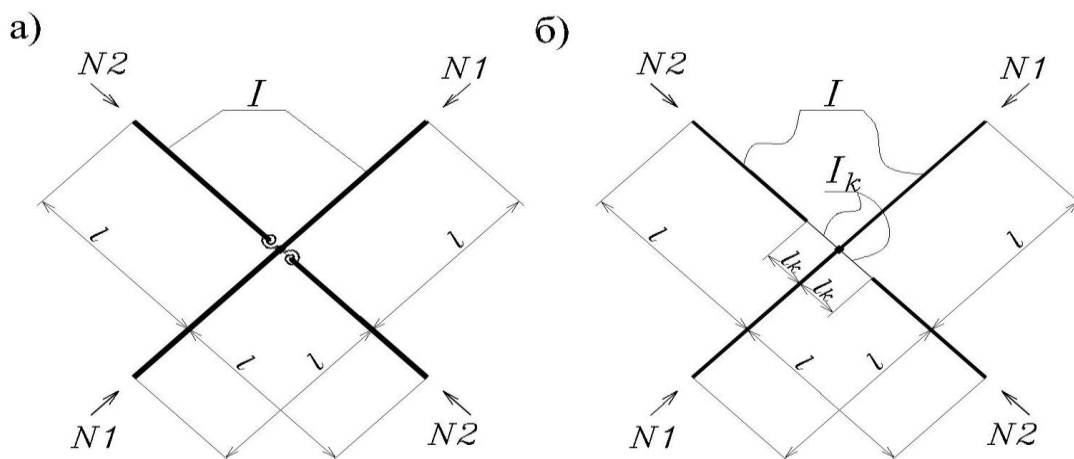


Рис. 7. Расчетные схемы крестовой решетки

Осталось выяснить, насколько большая погрешность получается при использовании формул (9-13). Для примера рассмотрим крестовую решетку стропильной фермы высотой и длиной панели по 3 метра. В таком случае длина элементов в расчетной схеме составит  $l = 212$  см. Момент инерции стержней условно принят  $I = 30$  см<sup>4</sup>, что примерно соответствует сечению L60x8. Длина и момент инерции накладки



соответственно  $l_k = 4$  см,  $I_k = 1$  см<sup>4</sup>, соответствуют пластине толщиной 10 мм и шириной 120 мм. Расчет будем производить по двум расчетным схемам: по рис. 7, а – расчетная схема крестовой решетки из 4 элементов с применением формул (9-13), и по рис. 7, б – более подробная расчетная схема из 6 элементов.

Таблица № 1

N2/N1	Критическая сила, кН (коэф. расчетной длины)		Погрешность, %
	По схеме рис. 7, а	По схеме рис. 7, б	
1	25.182 (2.321)	25.335 (2.314)	-0.6 (+0.3)
0,5	32.657 (2.039)	32.889 (2.031)	-0.71 (+0.355)
0	45.866 (1.72)	46.27 (1.713)	-0.873 (+0.439)
-0,5	77.415 (1.324)	78.344 (1.316)	-1.185 (+0.598)

Проверка точности решения задачи с применением формул (9-13) показала наличие погрешности, в большинстве случаев не превышающей 1,2%. Таким образом, найденные формулы существенно облегчают процесс расчета, не влияя сколько-либо существенно на его точность.

Таблица № 2

N2/N1	Коэф. расчетной длины			
	По схеме рис. 7, а	По схеме рис. 7, б	СП 16.13330. 2017	СП 294.1325800. 2017
1	2.321	2.314	2,8	2,698
0,5	2.039	2.031	2,8	2,375
0	1.72	1.713	2	2
-0,5	1.324	1.316	1,4	1.581

Для сравнения полученных результатов с нормами и документами, определим коэффициенты расчетных длин по действующим сводам правил и сравним их со значениями из таблицы 1. Результаты сведены в таблицу 2.

Данные таблиц 1 и 2 доказывают хорошую применимость найденных формул (9-13) для определения коэффициентов расчетных длин стержней крестовой решетки, так как упрощают процесс решения по сравнению с обычными формулами метода перемещений,

а также позволяют найти более точное и экономичное значение коэффициентов по сравнению со сводами правил.

### Литература

1. Aghayere A., Vigil J. Structural steel design: a practice-oriented approach. Prentice Hall, 2009. P. 692.
2. Sukhvarsh J. Structural stability theory and practice: buckling of columns, beams, plates, and shells. Hoboken: Wiley, 2021. P. 642.
3. Бузало Н.А., Гайджуров П.П., Кожихов А.Г. Исследования сжатых перфорированных стоек и совершенствование их конструктивной формы // Инженерный вестник Дона. 2009, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2009/129
4. Скачков С.В., Шуцкий С.В. Расчет стенки водонапорной башни в виде цилиндрического резервуара на прочность и устойчивость // Инженерный вестник Дона. 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4538
5. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
6. Грудев И.Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. М.: МИК, 2005. 320 с.
7. Лейтес С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. 308 с.
8. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И., Языева С.Б., Торлина Е.А. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при различных вариантах закрепления // Инженерный вестник Дона. 2011, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/415
9. Смирнов А.Ф. и др. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.
10. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 544 с.

### References

1. Aghayere A., Vigil J. Structural steel design: a practice-oriented approach. Prentice Hall, 2009. P. 692.
-



2. Sukhvarsh J. Structural stability theory and practice: buckling of columns, beams, plates, and shells. Hoboken: Wiley, 2021. P. 642.
3. Buzalo N.A., Gajdzurov P.P., Kozhihov A.G. Inzhenernyj vestnik Dona, 2009, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2009/129](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2009/129)
4. Skachkov S.V., Shuckij S.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2017, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4538](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4538)
5. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustojchivost' uprugih sistem [Basics of calculating the stability of elastic systems]. M.: Mashinostroenie, 1978. 312 p.
6. Grudev I.D. Ustojchivost' sterzhnevyyh elementov v sostave stal'nyh konstrukcij [Stability of bar elements in steel structures]. M.: MIK, 2005. 320 p.
7. Lejtes S.D. Ustojchivost' szhatyyh stal'nyh sterzhnej [Stability of compressed steel bars]. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu i arhitekture, 1954. 308 p.
8. Litvinov S.V., Klimenko E.S., Kulinich I.I., Yazyeva S.B., Torlina E.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2011, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/415](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/415)
9. Smirnov A.F. i dr. Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij [Structural mechanics. Dynamics and stability of structures]. M.: Strojizdat, 1984. 415 p.
10. Blejh F. Ustojchivost' metallicheskih konstrukcij [Stability of metal structures]. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1959. 544 p.