Явный вид оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса

Л.Ю. Фадеева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

Аннотация: В работе разработан алгоритм построения оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса. Явная формула оператора фильтрации получена на основе методов вычисления стохастических интегралов и теории аналитических функций комплексного переменного с привлечением спектрального анализа и теории L-марковских процессов. Рассмотрен интересный пример оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса, применение которого возможно для моделирования и управления сложными стохастическими системами. Показано, что этот оператор представляется в виде линейной комбинации значений принимаемого сигнала и интеграла с экспоненциально затухающей функцией
Ключевые слова: случайный процесс, L-марковский процесс, шум, фильтрация с запаздыванием, спектральная характеристика, оператор фильтрации.

Введение. Задача выделения полезного, передаваемого сигнала на фоне шума является одной из основных задач, возникающих при мониторинге сигналов. Достоверному приему информации препятствуют случайные искажения самого сигнала при распространении, наличие разнообразных (внешних и внутренних) помех и техническое несовершенство радиоустройств. Решение подобных задач сводится к анализу и синтезу новых радиотехнических систем, строящихся на базе передовых идей функциональной электроники, основой которых является разработка новых алгоритмов.

Задержка и фильтрация сигналов в производственных установках применяются для сглаживания данных с датчиков, при обработке сигналов в измерительных приборах для стабилизации измерений и повышения точности [1-3], для предсказания будущих состояний системы. Для L-марковского процесса, как процесса с конечной памятью длины L [4], оператор фильтрации с запаздыванием применяется для выделения трендов, устранения шумов, определения влияния отложенных состояний системы, например, при регулировке температуры с учетом тепловой инерции, в процессах нанесения тонких плёнок, травления, литографии, выявлении скрытых дефектов и т.п. Широкое применение фильтрация находит в нейросетях и в экстраполяционных моделях.

Целью данной работы является построение оптимального линейного оператора фильтрации с запаздыванием для стохастических L-марковских процессов с квазирациональной спектральной плотностью.

Методы решения задачи. В данной работе решается задача выделения – фильтрации – полезного, передаваемого сигнала $\xi(s)$ на фоне шума $\eta(s)$, математическое ожидание которого предполагается равным нулю: $M\eta(s) \equiv 0$.

Итак, требуется найти наилучшее линейное приближение значения $\xi(\tilde{t})$ полезного сигнала $\xi(t)$ в момент $\tilde{t} \in T$ по известным значениям принимаемого сигнала $\rho(s)$ в моменты времени $s \in T' \subset T$:

$$\rho(s) = \xi(s) + \eta(s) \ , \qquad (1)$$

Процессы $\xi(s)$ и $\eta(s)$ стационарно связаны и существует взаимная спектральная плотность $f_{\xi\eta}(\omega)$ этих процессов, представимая в виде:

$$f_{\xi\eta}(\omega) = f_{\xi\rho}(\omega) - f_{\xi\xi}(\omega) \ . \qquad (2)$$

Поставленная выше задача фильтрации допускает явное решение, если спектральные плотности $f_{\xi\eta}(\omega)$ и $f_{\rho\rho}(\omega)$ являются рациональными функциями ω [5,6]. Это решение представляет собой явную формулу для линейного оператора $\mathscr{L}$, осуществляющую оптимальную линейную фильтрацию значения полезного сигнала $\xi(s)$ в момент $t + \tau$ ($\tau > 0$ – фильтрация с прогнозом, $\tau < 0$ – фильтрация с запаздыванием или $\tau = 0$) по известным значениям принимаемого, наблюдаемого сигнала $\rho(s)$ в прошлом, т.е. при $s \leq t$:

$$\tilde{\xi}(t;\tau) = \mathrm{L}\ \{\rho(s), s \le t\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_\tau(\omega) dZ(\omega)\ . \qquad (3)$$

В формуле (3) $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями из спектрального разложения принимаемого сигнала $\rho(s)$:

$$\rho(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)\ ; \qquad (4)$$

а $\Phi_\tau(\omega)$ – функция, называемая спектральной характеристикой фильтрации.

В данной работе рассматривается обобщающая класс рациональных спектральных плотностей нерациональная плотность $f_{\rho\rho}(\omega)$ принимаемого сигнала $\rho(s)$ и рациональная совместная спектральная плотность $f_{\xi\rho}(\omega)$ вида:

$$f_{\rho\rho}(\omega) = \left|Q(\omega)\right|^2 \Big/ \left|\sum_{k=0}^{n} Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k}\right|^2\ ; \qquad (5)$$

$$f_{\xi\rho}(\omega) = \left|U(\omega)\right|^2 \Big/ \left|S(\omega)\right|^2\ . \qquad (6)$$

В формулах (5), (6) $U(\omega)$, $S(\omega)$, $Q(\omega)$, $Q_k(\omega)$, $k = 0, 1, 2\ldots n$ – полиномы от ω степеней соответственно m_0, m, q и q_k; все корни полиномов $U(\omega)$, $S(\omega)$, $Q(\omega)$ и P – квазиполинома:

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k} \qquad (7)$$

расположены в открытой верхней полуплоскости H^+, а действительные числа g_k связаны неравенствами:

$$0 = g_0 < g_1 < g_2 < \ldots < g_n\ , \qquad (8)$$

очевидно, не ограничивающими общности.

Из теоремы, приведенной в монографии [7], следует, что функции (5), (6) могут являться спектральными плотностями, если:

$$m_0 \le m - 1 \text{ и } q \le q_0 - 1. \qquad (9)$$

Очевидно, что класс спектральных плотностей (5) естественно расширяет класс рациональных спектральных плотностей. Кроме того, класс R – квазиполиномиальных спектральных плотностей (5) включает в себя подкласс L-марковских процессов [4,6,8], получающийся из (5) при $Q(\omega)\equiv 1$ и в предположении гауссовости принимаемого сигнала $\rho(s)$.

В настоящей работе будет построена явная формула спектральной характеристики оптимальной (в смысле метода наименьших квадратов) линейной фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$ с запаздыванием для сигналов $\rho(s)$ и $\xi(s)$ со спектральными плотностями (5), (6), причем, в основу при построении $\Phi_\tau(\omega)$ будут положены сформулированные последователем А.Н Колмогорова [5] известным математиком А.М. Ягломом условия, достаточные для того, чтобы некоторая функция комплексного переменного являлась спектральной характеристикой фильтрации [7].

В работе [7] автор использовал эти условия (требования) для нахождения спектральной характеристики фильтрации в случае рациональных плотностей $f_{\xi\rho}(\omega)$ и $f_{\rho\rho}(\omega)$; в данной работе будет показано, как эти условия можно применить для нерациональной, квазирациональной спектральной плотности $f_{\rho\rho}(\omega)$ вида (5) принимаемого сигнала $\rho(s)$ и рациональной совместной спектральной плотности $f_{\xi\rho}(\omega)$ вида (6).

Задача фильтрации с прогнозом ($\tau > 0$) ранее решена автором, им установлена следующая формула для спектральной характеристики фильтрации с прогнозом (упреждением), удовлетворяющая всем условиям, сформулированным в работе [7]:

$$\Phi_\tau(\omega) = \left[P_0(\omega)\cdot G(\omega)\right] / \left[Q(\omega)\cdot S(\omega)\right], \qquad (10)$$

где $P_0(\omega)$ – многочлен степени $m - 1$, коэффициенты которого находятся из системы m линейных уравнений, обеспечивающих аналитичность функции $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+.

Однако, в случае фильтрации с запаздыванием, т.е. когда $\tau < 0$, эта формула (10) для спектральной характеристики фильтрации оказывается неверной, поскольку её вид препятствует соблюдению требования убывания функции $\Psi_\tau(\omega)$ в верхней полуплоскости быстрее, чем $|\omega|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon \geq 0$. Действительно, поскольку функция $e^{i\alpha\omega}$ экспоненциально растет в H^+ при

$\alpha < 0$ и при $|\omega| \to \infty$, то функция $\Psi_\tau(\omega)$, связанная со спектральной характеристикой фильтрации соотношением:

$$\Psi_\tau(\omega) = e^{i\tau\omega} f_{\xi\rho}(\omega) - \varPhi_\tau(\omega) \cdot f_{\rho\rho}(\omega)\ , \tag{11}$$

будет содержать слагаемое $e^{i\tau\omega} \cdot \left(|U(\omega)|^2 \big/ |S(\omega)|^2 \right)$ ($U(\omega)$, $S(\omega)$ – многочлены), экспоненциально растущее в H^+, поскольку $\tau = \alpha < 0$, что противоречит вышеназванному требованию о скорости убывания функции (11) в H^+. Это значит, что слагаемое $e^{i\tau\omega} \cdot \left(|U(\omega)|^2 \big/ |S(\omega)|^2 \right)$, непременно присутствующее в формуле для $\Psi_\tau(\omega)$, должно быть сокращено с одним из слагаемых функции $\varPhi_\tau(\omega) \cdot f_{\rho\rho}(\omega) = \varPhi_\tau(\omega) \cdot \left(|Q(\omega)|^2 \big/ |G(\omega)|^2 \right)$. Очевидно, что в качестве такого слагаемого целесообразно принять функцию вида:

$$\chi(\omega) = \left[e^{i\tau\omega} \cdot |G(\omega)|^2 \cdot |U(\omega)|^2 \right] \Big/ \left[|Q(\omega)|^2 \cdot |S(\omega)|^2 \right]. \tag{12}$$

Очевидно, что эта функция содержит члены, пропорциональные $e^{i\alpha\omega}$ как при $\alpha \le 0$, так и при $\alpha > 0$, что нарушает требование о скорости роста $\varPhi_\tau(\omega)$ в H^-. Чтобы избавиться от членов с множителями $e^{i\alpha\omega}$ с $\alpha > 0$ в формуле для $\varPhi_\tau(\omega)$, необходимо убрать из числа слагаемых функции $\chi(\omega)$ те слагаемые, что содержат такие множители.

Вышеприведенные рассуждения о структуре функции $\varPhi_\tau(\omega)$ при $\tau < 0$ с учетом требования, наложенного на убывание функции $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+, приводят к следующей формуле для спектральной характеристики фильтрации с запаздыванием:

$$\varPhi_\tau(\omega) = \left[e^{i\tau\omega} |G(\omega)|^2 \cdot |U(\omega)|^2 + \lambda_\tau(\omega) - e^{i\tau\omega} \cdot |U(\omega)|^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=j_k+1}^{n} Q_k(\omega) \bar{Q}_j(\omega) e^{i\omega(g_j - g_k)} \right] \Big/ \left[|Q(\omega)|^2 \cdot |S(\omega)|^2 \right] =$$
$$= \left[\lambda_\tau(\omega) + e^{i\tau\omega} \cdot |U(\omega)|^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{j_k} Q_k(\omega) \bar{Q}_j(\omega) e^{i\omega(g_j - g_k)} \right] \Big/ \left[|Q(\omega)|^2 \cdot |S(\omega)|^2 \right]. \tag{13}$$

где j_k, $k = 0, 1, 2 \ldots n$ – такие числа, что:

$$g_{j_k} - g_k + \tau < 0 \ \text{ и } \ g_{j_k+1} - g_k + \tau \ge 0\ , \tag{14}$$

а $\lambda_\tau(\omega)$ – целая функция, представляющая собой сумму слагаемых вида $\Theta(\omega)\cdot e^{i\alpha\omega}$, в которых $\Theta(\omega)$ – полином, $\alpha \le 0$.

Чтобы установить вид функции $\lambda_\tau(\omega)$, выпишем функцию:

$$\Psi_\tau(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=j_k+1}^{n} Q_k(\omega)\bar{Q}_j(\omega)e^{i\omega(g_j-g_k+\tau)}\cdot\left|U(\omega)\right|^2-\lambda_\tau(\omega)}{\left|S(\omega)\right|^2\left|G(\omega)\right|^2}. \tag{15}$$

Все корни квазиполинома $G(\omega)$, которых бесконечное множество, расположены в верхней полуплоскости H^+, поэтому требованию аналитичности $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+ можно удовлетворить лишь тогда, когда числитель функции $\Psi_\tau(\omega)$ будет содержать множитель $G(\omega)$. Последнее требование уже однозначно определяет целую функцию $\lambda_\tau(\omega)$. Это требование в совокупности со всеми требованиями, изложенными в [7], можно удовлетворить, определив функцию $\lambda_\tau(\omega)$ в виде суммы $\lambda_\tau(\omega)=P(\omega)G(\omega)+\lambda_0(\omega)$, где $P(\omega)$ – многочлен, а $\lambda_0(\omega)$ – такая целая функция, вычитая которую из двойной суммы $\left|U(\omega)\right|^2\cdot\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=j_k+1}^{n} Q_k(\omega)\bar{Q}_j(\omega)e^{i\omega(g_j-g_k+\tau)}$ в числителе функции $\Psi_\tau(\omega)$ (15), можно выделить из этого числителя квазиполином $G(\omega)$ в качестве сомножителя. Принимая во внимание вышеизложенное относительно целой функции $\lambda_0(\omega)$ и неравенств $j_0 \le j_k$, справедливых при каждом $k = 0, 1, 2\ldots n$, выберем функцию $\lambda_0(\omega)$ в виде:

$$\lambda_0(\omega)=-\left|U(\omega)\right|^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=j_0+1}^{j_k} Q_k(\omega)\bar{Q}_j(\omega)e^{i\omega(g_j-g_k+\tau)}. \tag{16}$$

При этом полагаем, что:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=j_0+1}^{j_k} Q_k(\omega)\bar{Q}_j(\omega)e^{i\omega(g_j-g_k+\tau)}\equiv 0, \tag{17}$$

для всех тех k, при которых $j_0+1 < j_k$.

Таким образом, окончательные формулы для функций $\Phi_\tau(\omega)$ и $\Psi_\tau(\omega)$ при $\tau<0$ примут вид:

$$\Phi_\tau(\omega)=\frac{e^{i\tau\omega}\cdot\left|U(\omega)\right|^2 G(\omega)\sum_{j=0}^{j_0}\bar{Q}_j(\omega)e^{i\omega g_j}+P(\omega)\cdot G(\omega)}{\left|Q(\omega)\right|^2\cdot\left|S(\omega)\right|^2}; \quad (18)$$

$$\Psi_\tau(\omega)=\frac{\left|U(\omega)\right|^2\sum_{j=j_0+1}^{n}\bar{Q}_j(\omega)e^{i\omega(g_j+\tau)}-P(\omega)}{\bar{G}(\omega)\left|S(\omega)\right|^2}. \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) видно, что те части требований [7], которые касаются убывания $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+ и возрастания $\Phi_\tau(\omega)$ в H^- удовлетворены, а вот требования аналитичности $\Phi_\tau(\omega)$ в H^- и $\Psi_\tau(\omega)$ в H^+ необходимо ещё удовлетворить. Очевидно, что для этого нужно подобрать многочлен $P(\omega)$ так, чтобы функция $\Phi_\tau(\omega)$ вида (18) не имела полюсов (особенностей в H^-), а функция $\Psi_\tau(\omega)$ вида (19) – в H^+.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы числитель спектральной характеристики фильтрации с запаздыванием, задаваемой формулой (18), во всех корнях произведения $\bar{Q}(\omega)\cdot\bar{S}(\omega)$ (очевидно, что корни этого произведения расположены в нижней полуплоскости H^-) имел нуль той же кратности и вместе с тем числитель функции $\Psi_\tau(\omega)$ вида (19) имел нуль той же кратности, что и многочлен $S(\omega)$, имеющий все корни в H^+. Эти требования приводят к системе $(2m+q)$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочлена $P(\omega)$. Задача построения многочлена $P(\omega)$ является обычной задачей теории интерполяции и имеет единственное решение в классе многочленов степени $(2m+q-1)$.

Таким образом, получено явное решение задачи оптимальной фильтрации с запаздыванием, которое можно сформулировать следующим образом:

Спектральная характеристика оптимальной линейной фильтрации с запаздыванием стационарного процесса $\xi(s)$ в момент $t+\tau$, $\tau < 0$, по известным значениям в прошлом стационарного процесса $\rho(s)$ со спектральной плотностью (5), обратной R–квазиполиномиальной, определяется в случае совместной рациональной спектральной плотности (6) процессов $\xi(s)$ и $\rho(s)$ формулой (18). Число j_0, $0 \le j_0 \le n$, определяется из соотношений $g_{j_0} < -\tau \le g_{j_0+1}$, а неизвестные коэффициенты полинома $P(\omega)$ степени $(2m+q-1)$ однозначно находятся из системы линейных алгебраических уравнений, обеспечивающих аналитичность функций $\Phi_\tau(\omega)$ вида (18) в H^- и $\Psi_\tau(\omega)$ вида (19) в H^+.

Результаты работы. Покажем, как применяется выведенная формула (18) для спектральной характеристики фильтрации с запаздыванием на следующем примере принимаемого сигнала $\rho(s)$ со спектральной плотностью

$$f_{\rho\rho}(\omega) = 1\Big/\left|\tilde{G}(\omega)\right|^2 = 1\Big/\left|G_0(\omega) + G_1(\omega)e^{-i\omega} + G_2(\omega)e^{-2i\omega}\right|^2 \qquad (20)$$

и совместной спектральной плотностью

$$f_{\xi\rho}(\omega) = 1\Big/\left|S(\omega)\right|^2 = 1\Big/\left|\omega^2 + \beta^2\right|, \qquad (21)$$

где в терминах формулы (7) $n = 2$; $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$; $\beta > 0$; $G_1(\omega) = 2a$; $m=2$,

$G_0(\omega) = \omega(b-c)i + d\omega + a - c - id = D\omega + E$; $D = d + (b-c)i$; $E = a - c - id$;

$G_2(\omega) = \omega(d - ci - bi) + a + c + di = H\omega + F$; $H = d - i(c+b)$; $F = a + c + di$.

В работе [9] с применением теорем Штурма и Чеботарева [10] авторы доказали, что условия:

$$b > a > 0, \quad c > 0, \quad d > 0, \qquad (22)$$

достаточны для принадлежности всех корней квазиполинома $\tilde{G}(\omega)$ верхней полуплоскости.

Из формулы (18) видим, что спектральная характеристика фильтрации с запаздыванием существенно зависит от числа j_0, для которого $j_0+1 < j_k$ при

Инженерный вестник Дона, №8 (2025)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10312

всех k = 0,1,2. Докажем, что в трех случаях при $0 \le -\tau < 1$; $1 \le -\tau < 2$ и $(-\tau) \ge 2$, от которых зависит число j_0, спектральную характеристику с запаздыванием $\Phi_\tau(\omega)$ целесообразно задавать следующими формулами, которые обеспечат выполнение всех трех достаточных условий, сформулированных в работе [7]:

в случае $0 \le -\tau < 1$: $$\Phi_\tau(\omega) = \tilde{G}(\omega) \cdot \left[e^{i\omega\tau}\bar{G}_0(\omega) + A\omega + B\right] \Big/ \left(\omega^2 + \beta^2\right); \qquad (23)$$

в случае $1 \le -\tau < 2$: $$\Phi_\tau(\omega) = \tilde{G}(\omega) \cdot \left\{e^{i\omega\tau} \cdot \left[\bar{G}_0(\omega) + \bar{G}_1(\omega)e^{i\omega}\right] + A\omega + B\right\} \Big/ \left(\omega^2 + \beta^2\right); \qquad (24)$$

в случае $(-\tau) \ge 2$: $$\Phi_\tau(\omega) = \tilde{G}(\omega)\left[e^{i\omega\tau}\bar{\tilde{G}}(\omega) + A\omega + B\right] \Big/ \left(\omega^2 + \beta^2\right). \qquad (25)$$

Из формул (23) – (25) и связанной с функцией $\Phi_\tau(\omega)$ формулой (11) функции $\Psi_\tau(\omega)$ нетрудно видеть, что спектральная характеристика фильтрации $\Phi_\tau(\omega)$ во всех трех случаях содержит только слагаемые вида $M(\omega)e^{i\omega\alpha}$, где α < 0, а функция $\Psi_\tau(\omega)$ – только слагаемые вида $K(\omega)e^{i\omega\alpha}$ при α ≥ 0. Эти факты обеспечивают требуемое возрастание функции $\Phi_\tau(\omega)$ в нижней полуплоскости не быстрее, чем некоторая степень $|\omega|$, а для функции $\Psi_\tau(\omega)$ – убывание в верхней полуплоскости быстрее, чем $|\omega|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon \ge 0$.

Необходимость удовлетворения условий аналитичности $\Phi_\tau(\omega)$ и $\Psi_\tau(\omega)$ в нижней H^- и, соответственно, верхней H^+ полуплоскостях, приводит в каждом из трех случаев к системе двух линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B многочлена $P(\omega) = A\omega + B$. Эти системы получаются путем обращения в нуль числителей функций $\Phi_\tau(\omega)$ и $\Psi_\tau(\omega)$ в их полюсах $\omega = -\beta i$ в H^- и $\omega = \beta i$ в H^+ соответственно.

Например, при $1 \le -\tau < 2$ система будет иметь вид:

$$\left\{e^{i\omega\tau} \cdot \left[\bar{G}_0(\omega) + \bar{G}_1(\omega)e^{i\omega}\right] + A\omega + B\right\}_{\omega=-\beta i} = 0; \quad \left[e^{i\omega(\tau+2)} \cdot \left(\bar{H}\omega + \bar{F}\right) - A\omega - B\right]_{\omega=\beta i} = 0$$

Решением этой системы являются комплексные числа:

$$A = (\varphi + \mu + 2a\sigma)/(2\beta i); \quad B = (\mu - \varphi - 2a\sigma)/2 \qquad (26)$$

где

$$\sigma = e^{\beta(\tau+1)},\ \mu = \left(\bar{F} + \bar{H}\cdot\beta i\right)e^{-\beta(\tau+2)},\ \varphi = e^{\beta\tau}\left(\beta\bar{D}i - \bar{E}\right),\ \lambda = \left(\bar{F} - \beta\bar{H}i\right)e^{\beta(\tau+2)}\ . \quad (27)$$

Аналогично в двух других случаях получим:

при $0 \le -\tau < 1$: $A = \left[\mu - \varphi + (2a/\sigma)\right]/(2\beta i)$, $B = \left[\mu + \varphi + (2a/\sigma)\right]/2$; (28)

при $(-\tau) \ge 2$: $A = (\varphi + \lambda + 2a\sigma)/(2\beta i)$, $B = -(\varphi + \lambda + 2a\sigma)/2$. (29)

Чтобы понять структуру оптимального оператора фильтрации с запаздыванием, подставим в его спектральное представление (3) формулы (23) – (25) для спектральной характеристики с запаздыванием $\Phi_\tau(\omega)$ для трех случаев. Тогда оператор $\tilde{\xi}(t;\tau)$ будет представлять собой сумму интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(æ_k\omega^2 + \nu_k\omega + \vartheta_k\right)/\left(\omega^2+\beta^2\right)\right]e^{i\omega(t-r_k)}dZ(\omega)$, где $r_1 = \tau$, $r_2 = \tau - 1$, $r_3 = \tau - 2$, $r_4 = 0$, $r_5 = -1$, $r_6 = -2$, $r_7 = \tau + 1$.

Превратив неправильные рациональные дроби под символом интеграла в правильные и разложив затем последние на простейшие дроби (множители), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{æ_k\omega^2 + \nu_k\omega + \vartheta_k}{\omega^2+\beta^2}e^{i\omega(t-r_k)}dZ(\omega) = æ_k\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-r_k)}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_k e^{i\omega(t-r_k)}}{\omega-\beta i}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{Y_k e^{i\omega(t-r_k)}}{\omega+\beta i}dZ(\omega) \quad (30)$$

Числа X_k и Y_k в (30) находятся методом неопределенных коэффициентов.

Первый интеграл в (30) согласно спектральному представлению (4) принимаемого сигнала $\rho(s)$ представляет собой значение сигнала в момент $s = t - r_k$, а второй и третий интегралы преобразуем, заменив подынтегральную дробь $1/(\omega - \beta i)$ на несобственный интеграл $1/(\omega-\beta i) = i\int_0^{\infty}e^{-i(\omega-\beta i)s}ds$. Тогда получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[X_k e^{i\omega(t-r_k)}/(\omega-\beta i)\right]dZ(\omega) = i\int_0^{\infty}X_k e^{-\beta s}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-r_k)}dZ(\omega)\right]ds = i\int_0^{\infty}X_k e^{-\beta s}\rho(t-r_k)ds \quad (31)$$

Средний интеграл в формуле (31), распространенный на $(-\infty;\infty)$, в силу формулы (4) есть значение процесса $\rho(s)$ в точке $s = t - r_k$. Аналогичным образом представляются оставшиеся 14 интегралов (всего их 16) в случае $0 \le -\tau < 1$; 22 интеграла в случае $1 \le -\tau < 2$; и 30 интегралов при $(-\tau) \ge 2$.

Объединяя формулы для оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для всех трех случаев, придем к следующей окончательной компактной формуле:

$$\tilde{\xi}(t;\tau) = D\bar{D}\rho(t+\tau) + HA\rho(t-2) + \bar{D}H\rho(t+\tau-2) + DA\rho(t) + \Omega + \sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty \left(iX_k e^{-\beta s} + iY_k e^{\beta s}\right)\rho(t-t_k)ds \quad (32)$$

где в случае $0 \le -\tau < 1$ $\Omega = 0$, $N = 6$; в случае $1 \le -\tau < 2$ $\Omega = 0$, $N = 9$; при $(-\tau) \ge 2$ $\Omega = D\bar{H}\rho(t+\tau+2) + H\bar{H}\rho(t+\tau)$, $N = 12$; и $t_1 = t_9 = t_{12} = s-\tau$; $t_2 = t_8 = s-\tau+1$; $t_3 = s-\tau+2$; $t_4 = s$; $t_5 = s+1$; $t_6 = s+2$; $t_7 = t_{11} = s-\tau-1$; $t_{10} = s-\tau-2$, а комплексные числа X_k и Y_k, k = 1,2…12 найдены методом неопределенных коэффициентов при разложении дробей вида $\left(æ_k\omega^2 + \nu_k\omega + \vartheta_k\right)/\left(\omega^2+\beta^2\right)$ на простейшие дроби. Например, $X_2 = \left[a\left(\bar{D}\beta i + \bar{E}\right)\right]/(\beta i)$; $Y_2 = a\bar{D} - a\bar{E}/(\beta i)$; $X_9 = \left(2a^2\right)/(\beta i)$; $Y_9 = \left(-2a^2\right)/(\beta i)$.

Заключение. В работе построена стохастическая модель оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью. При решении задачи фильтрации использовались методы построения спектральных характеристик, разработанные математиком А. М. Ягломом, спектральный анализ случайных процессов и теория функций комплексного переменного Показано, что оператор фильтрации $\tilde{\xi}(t;\tau)$ с запаздыванием L-марковского процесса ρ(t) с квазирациональной спектральной плотностью представляется в виде линейной комбинации значений этого процесса в некоторые моменты времени и интеграла с экспоненциально затухающей функцией $e^{-\beta s}$, распространенного на $[0;\infty)$.

Алгоритм расчета оператора фильтрации может быть реализован в ПЛИС, в виде цифрового сигнального процессора, интегрированного в микросхему.

Литература

1. Приймак А.А. Реализация адаптации экстремальной фильтрации к реальному времени // Инженерный вестник Дона. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.

2. Мисюра В.В., Мисюра В.И. Обработка и распознавание сигналов. Современное состояние проблемы // Инженерный вестник Дона. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.

3. Товстик Т.М. Фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью. // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2004, вып. 1 (№1). С. 55 – 60.

4. Розанов Ю.А. О гауссовских полях с заданными условными распределениями // Теория вероятностей и её применения, 1967. т.12. №3. С.433 – 443.

5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis / Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403p.

6. Молчан Г.М. L-марковские гауссовские поля // ДАН СССР, 1974, Т. 215, №5, 1974. С.1054-1057.

7. Yaglom A.M. An Introduction to the Teory of Stationaty Random Functions/ A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

8. Фадеева Л. Ю. Построение стохастической модели линейного экстраполятора для L-марковского фрактального процесса // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2025. № 1 (65). С. 46–54. DOI: doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46; EDN: RXISUS.

9. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системыю. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.

10. Чеботарёв Н.Г, Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Труды математического института им. В.А Стеклова, Т.26. Изд-во АН СССР. М., Л. 1949. 331с.

References

1. Prijmak A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.

2. Misjura V.V., Misjura V.I. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.

3. Tovstik T.M. Vestnik SPbGU. Ser. 1, 2004, vyp. 1 (№1). pp. 55 – 60.

4. Rozanov Ju.A. Teorija verojatnostej i ejo primenenija, 1967. t.12. №3. pp.433 - 443

5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis. Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403p.

6. Molchan G.M. DAN SSSR, 1974, T. 215, №5, 1974. pp.1054-1057.

7. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

8. Fadeeva L. Ju. Vestnik Povolzhskogo gosudarstvennogo tehnologicheskogo universiteta. Ser.: Radiotehnicheskie i infokommunikacionnye sistemy. 2025. № 1 (65). pp. 46–54. DOI: doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46; EDN: RXISUS.

9. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyju. T.4. №4 (2024): vypusk 14. pp. 1-8.

10. Chebotarjov N.G, Mejman N.N. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A Steklova, T.26. Izd-vo AN SSSR. M., L. 1949. 331p.

Дата поступления: 16.06.2025 Дата публикации: 26.07.2025