Программный комплекс τ-полнота (B, S)-рынка в случае специальной хааровской фильтрации при допущении арбитража.

Шишкова А.Н.

Рассматриваемый программный комплекс предоставляет возможность пользователю задать компоненты (B,S)-рынка относительно специальной хааровской фильтрации посредством ввода конечного момента времени N, последовательности строго положительных цен банковского счёта $B_0, B_1, ..., B_N$ и последовательности строго положительных цен акций в моменты времени $0,1,2,...,N$. Далее предоставляется возможность ввода случайной величины τ на атомах $A_0, A_1, ..., A_N$, C_N, определяющих рынок в конечный момент времени.

Так начинает свою работу основная программа, переходящая в последовательное выполнение процедур MO, MATR, MGAUS, HEDG, описанных ниже.

Процедура MO находит σ-алгебру F_τ, совпадающую с одной из F_n, $n = 1, 2, ..., N$ в случае, если случайная величина τ является моментом остановки. Теоретическая база, положенная в основу факта совпадения F_τ с одной из σ-алгебр F_n, $n = 1, 2, ..., N$ изложена в лемме 3[1]. Поиск номера n осуществляется по алгоритму, опирающемуся на лемму 1[1] и следствие леммы 2[1]. Здесь также предусмотрена возможность завершения программы в случае, когда случайная величина τ не является моментом остановки.

Процедура MATR путём перехода к $(1,Z)$-рынку[2] формирует матрицу коэффициентов $D = (D_1, D_2, ..., D_n)$ размером $n \times (\tau_1 + (\tau_2 - 1) + ... + (\tau_{n-1} - (n-2)) + (\tau_n - (n-1)))$, состоящую из n матриц вида

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 - b_1 & a_2^1 - a_1^1 & ...... & a_{\tau_1}^1 - a_{\tau_1 - 1}^1 \\ 0 & 0 & ...... & 0 \\ ...... & ...... & .... & .... \\ 0 & 0 & ...... & 0 \\ 0 & 0 & ...... & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -(b_2 - b_1) & 0 & .... & 0 \\ a_2^2 - b_2 & a_3^2 - a_2^2 & ...... & a_{\tau_2}^2 - a_{\tau_2 - 1}^2 \\ 0 & 0 & ...... & 0 \\ ...... & ...... & .... & .... \\ 0 & 0 & ...... & 0 \\ 0 & 0 & ...... & 0 \end{pmatrix},$$

…………………………………………….....

$$D_1 = \begin{pmatrix} -(b_n - b_{n-1}) & 0 & .... & 0 \\ -(b_n - b_{n-1}) & 0 & .... & a_{\tau_2}^2 - a_{\tau_2 -1}^2 \\ -(b_n - b_{n-1}) & 0 & .... & 0 \\ -(b_n - b_{n-1}) & 0 & .... & a_{\tau_2}^2 - a_{\tau_2 -1}^2 \\ ...... & ...... & .... & .... \\ -(b_n - b_{n-1}) & 0 & .... & 0 \\ a_2^2 - b_2 & a_3^2 - a_2^2 & ...... & a_{\tau_2}^2 - a_{\tau_2 -1}^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы D отвечает за полноту рассматриваемого рынка[1]. Процедура MGAUS осуществляет элементарные преобразования над матрицей D, приводя её к виду, при котором первые n столбцов матрицы имеют единичный вид.. Процедура опирается на общеизвестный факт, говорящий о том, что с помощью конечного числа элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду. В [1] доказано, что рынок полон по отношению к моменту времени τ тогда и только тогда, когда матрица D имеет ранг, равный n.

Далее путём подсчёта ненулевых строк матрицы D определяется её ранг, что позволяет сделать вывод о τ -полноте рынка. В случае отсутствия τ -полноты работа программы завершается.

В случае наличия τ -полноты пользователю предоставляется возможность ввести компоненты финансового обязательства а атомах σ -алгебры F_τ . Процедура HEDG подсчитывает компоненты самофинансируемого портфеля $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^N$, реплицирующего заданное финансовое обязательство.

Рассмотрим работу программы на примере.

Пример. Рассмотрим стохастический базис $(\Omega, F_n, F, P)_{n=0}^N$, $F_0 = \{\Omega, \varnothing\}, F_N = F$ и $F_n = \sigma(A_1, A_2, ..., A_n, C_n)$, причём $A_1, A_2, ..., A_n, C_n$ - полный набор атомов $\sigma -$ алгебры F_n .

Такая фильтрация называется специальной хааровской[3].

Положим $N = 5$ и зададим последовательность цен банковского счёта B_n и последовательность цен акций акций $S_n, n = 1, 2, ..., N$ на атомах $\sigma -$ алгебр F_n в различные моменты времени:

$B_1(A_1) = 1$	$B_2(A_1) = 3$	$B_3(A_1) = 6$	$B_4(A_1) = 1$	$B_5(A_1) = 6$
$B_1(C_1) = 2$	$B_2(A_2) = 1$	$B_3(A_2) = 3$	$B_4(A_2) = 2$	$B_5(A_2) = 4$
	$B_2(C_2) = 4$	$B_3(A_3) = 1$	$B_4(A_3) = 3$	$B_5(A_3) = 5$
		$B_3(C_3) = 1$	$B_4(A_4) = 4$	$B_5(A_4) = 6$
			$B_4(C_4) = 2$	$B_5(A_5) = 7$
				$B_5(C_5) = 4$

$S_1(A_1) = 5$	$S_2(A_1) = 3$	$S_3(A_1) = 12$	$S_4(A_1) = 8$	$S_5(A_1) = 6$
$B_1(C_1) = 6$	$S_2(A_2) = 7$	$S_3(A_2) = 3$	$S_4(A_2) = 10$	$S_5(A_2) = 12$

$$S_2(C_2)=8 \quad S_3(A_3)=3 \quad S_4(A_3)=9 \quad S_5(A_3)=25$$
$$S_3(C_3)=5 \quad S_4(A_4)=8 \quad S_5(A_4)=30$$
$$B_4(C_4)=2 \quad S_5(A_5)=49$$
$$S_5(C_5)=4$$

Зададим также случайную величину τ:

$\tau(A_1)=1$
$\tau(A_2)=3$
$\tau(A_3)=3$
$\tau(A_3)=3$
$\tau(A_4)=4$
$\tau(A_5)=4$
$\tau(C_5)=4$

Процедура МО определит, что случайная величина τ является моментом остановки и F_τ совпадает с F_4.

Процедура MATR осуществит переход к $(1,Z)$-рынку[2]:

$a_1^1=1 \quad a_2^1=1 \quad a_3^1=2 \quad a_4^1=8 \quad a_5^1=1$
$b_1=3 \quad a_2^2=7 \quad a_3^2=1 \quad a_4^2=5 \quad a_5^2=3$
$b_2=2 \quad a_3^3=3 \quad a_4^3=3 \quad a_5^3=5$
$b_3=5 \quad a_4^4=2 \quad a_5^4=5$
$b_4=1 \quad a_5^5=7$
$b_5=1$

Далее будет сформирована матрица D:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Процедура MGAUS приведёт матрицу D к виду

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь определится, что ранг матрицы равен 4, то есть она имеет полный ранг. Выдаётся сообщение о полноте относительно τ.

Процедура HEDG предлагает задать компоненты финансового обязательства на атомах A_1, A_2, A_3, A_4, C_4

$$f(A_1)=2$$
$$f(A_2)=7$$
$$f(A_3)=5$$
$$f(A_4)=4$$
$$f(A_1)=2$$
$$f(B_4)=4$$

Подсчитываются компоненты самофинансируемого портфеля $\pi=(\beta_n,\gamma_n)_{n=0}^{N}$, реплицирующего данное финансовое обязательство

$\beta_1^1=-12{,}5$	$\beta_2^1=-30$	$\beta_3^1=-30$	$\beta_4^1=-30$	$\beta_5^1=-30$
	$\beta_2^2=4{,}5$	$\beta_3^2=-0{,}7$	$\beta_4^2=-0{,}7$	$\beta_5^2=-0{,}7$
		$\beta_3^3=-1{,}5$	$\beta_4^3=-6$	$\beta_5^3=-6$
			$\beta_4^4=0$	$\beta_5^4=-2$
				$\beta_5^5=0$

$\gamma_1^1=-2{,}5$	$\gamma_2^1=1$	$\gamma_3^1=1$	$\gamma_4^1=1$	$\gamma_5^1=1$
	$\gamma_2^2=1{,}5$	$\gamma_3^2=1$	$\gamma_4^2=1$	$\gamma_5^2=1$
		$\gamma_3^3=-0{,}5$	$\gamma_4^3=1$	$\gamma_5^3=1$
			$\gamma_4^4=0$	$\gamma_5^4=1$
				$\gamma_5^5=1$

Литература

1. Шишкова А.Н. Критерий $\tau-$полноты -рынка в случае специальной хааровской фильтрации при допущении арбитража // Известия высших учебных заведений: Северо-Кавказский регион, 2010, №4-с.24-27.

2. Белявский Г.И., Мисюра В.В., Павлов И.В. Ранговый критерий полноты одного арбитражного рынка при допущении арбитража.// ОППМ, М: ТВП, 1999, т.6, №1, с.121−122.

3. Волосатова Т.А. О хааровских интерполяциях финансовых рынков, приводящих к полным рынкам. ОППМ, М: ТВП, 2004, т. 11, №.3, с. 505-506.